

## Allseitig gezogene Ebene mit Zweibogenloch

Von C. Weber in Schlewecke/Nette

„Je schwieriger das Problem,  
desto größer der Reiz,  
einen Weg zur Lösung zu finden.“

Für die allseitig gezogene Ebene mit einem Loch, dessen Rand aus zwei Kreisbögen besteht, wird ein neues Lösungsverfahren entwickelt, um das Verhalten der Spannungsfunktion in der Nähe einer Innenecke zu untersuchen. Hierzu wird die Scheibe konform auf den Ebenenausschnitt, der durch zwei Gerade begrenzt ist, abgebildet. Für die inverse Spannungsfunktion wird ein System von Einzellösungen, die spannungsfreie Ränder geben, aufgestellt. Weiter wird gezeigt, wie aus diesen Einzellösungen eine Näherungslösung des Problems zu finden ist, wobei die Randbedingungen eines inneren Schnittrandes und die dort auftretende Singularität zu berücksichtigen sind. Ein Glied der Lösung gibt das Verhalten in der Nähe der Innenecke. Für das Beispiel mit dem Winkel  $\pi/2$  in der Innenecke wird das zahlenmäßige Ergebnis angegeben und die Güte der Näherungslösung gezeigt.

To study the properties of the stress function in the neighbourhood of an inner corner, a new method is found for the solution of the problem of the plane provided with a hole, the edge of which consists of two arcs of circles, when the plane is under a uniform tensile stress. For that purpose, the disc is conformally mapped onto a part of the plane, bounded by two straight lines. For the inverse stress function, a system of particular solutions is stated, giving stress-free boundaries. It is shown how to compose an approximative solution of the problem from the particular solutions; for that, the boundary conditions at an inner edge and the occurring singularities are to be taken into account. One term of the solution gives the properties close by the inner corner. The numerical result is given for the example, that the angle at the inner corner is  $\pi/2$ , and the accuracy of the approximative solution is illustrated.

Un plan étiré uniformément soit pourvu d'un trou, dont le bord est composé de deux arcs circulaires. Pour examiner la fonction de tension près d'une arête intérieure une méthode nouvelle est développée. A cette fin le disque est représenté conformément sur un secteur du plan, qui est borné par deux lignes droites. Pour la fonction inverse de tension un système de solutions particulières est donné, qui fournissent des bords sans tension. Il est démontré, qu'on peut trouver, à l'aide de ces solutions particulières, une solution approximative du problème en tenant compte des conditions sur une ligne intérieure d'intersection et des singularités y occurrentes. Un des termes de la solution décrit la propriété près de l'arête intérieure. La valeur numérique est donnée pour l'exemple, que l'angle de l'arête intérieure est  $\pi/2$  la qualité de l'approximation est démontrée.

Разрабатывается новый метод исследования функции напряжения вблизи внутреннего угла в случае растягиваемой во всех направлениях плоскости с отверстием, ограниченным двумя дугами пересекающихся окружностей. С этой целью пластина конформно отображается на часть плоскости, ограниченной двумя прямыми. Для отображенной функции напряжений дается система частных решений, удовлетворяющих условию свободных краев. Затем показывается, как из этих частных решений должно быть найдено приближенное решение данной задачи при учете краевых условий у внутреннего угла и имеющейся там сингулярности. Один член решения выражает поведение функции вблизи внутреннего угла. Для случая, когда внутренний угол равняется  $\pi/2$ , приводятся численные результаты и показывается точность метода расчета.

### A. Problem

Auf eine Ebene wirkt im Unendlichen ein allseitiger gleichmäßiger Zug  $p$ . Die Ebene hat nach Bild 1 ein Loch, dessen Rand aus zwei Kreisbögen besteht, so daß Innenecken entstehen. Die Spannungsverteilung in der Nähe der Innenecke soll untersucht werden. Im Beispiel ist der Winkel der Innenecke gleich  $\pi/2$  und die Lochlänge gleich 4 gesetzt<sup>1)</sup>.

### B. Untersuchung durch Inversion und Verfolgung der auftretenden Singularitäten

Zuerst betrachten wir das Verhalten der Airyschen Spannungsfunktion  $F^*$  im Unendlichen. Wir überlegen uns also, welche Glieder  $F^*$  erhält, wenn wir es für genügend

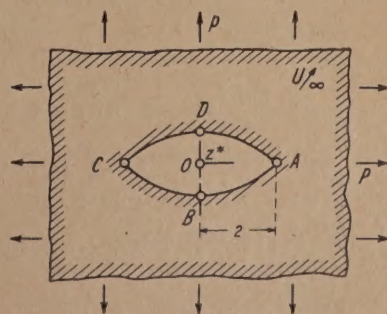


Bild 1

<sup>1)</sup> Es besteht die Möglichkeit, das Gebiet der Scheibe auf ein Gebiet mit Kreisloch abzubilden und dann Lösungen durch Reihenentwicklung zu finden. Dieses Verfahren, das ich auch für die Ebene mit quadratischem Loch entwickelt habe, wird in einem getrennten Aufsatz erscheinen. Zur Untersuchung des Spannungszustandes in der Umgebung der Innenecken ist es nicht geeignet.



große Entfernung vom Loche aufschreiben. Wegen der Spannung  $p$  enthält  $F^*$  das Glied  $\frac{1}{2} p r^{*2}$ , die weiteren Glieder müssen so beschaffen sein, daß ihre zweiten Ableitungen mit wachsender Entfernung gegen Null gehen. Wie beim Kreisloch kommt folglich das Glied  $-c \ln r^*$  hinzu und weitere Glieder von der Gestalt  $Re z^{*-n}$  und  $Re r^{*2} z^{*-n}$ , wobei die Exponenten  $-n$  negative gerade Werte annehmen. Wir erhalten hiermit

$$F^* = \frac{1}{2} p r^{*2} - c \ln r^* + \dots \quad (1).$$

Den Wert  $c$  wird uns unsere Untersuchung geben. (Ersetzen wir unser Loch durch einen Kreis vom Halbmesser 1,2, so wird  $c=0,72 p$ .) Dieser Ansatz gilt nur bis zum Kreise durch die Ecken  $A$  und  $C$ , also nicht bis zum Lochrande. Innerhalb dieses Kreises müssen wir  $F^*$  auf andere Weise ausdrücken. Am unbelasteten Rande wird  $dF^*=0$ , auch  $F^*$  setzen wir dort gleich Null.

Bequemer werden die Betrachtungen, wenn wir nicht das Gebiet der gelochten Ebene, sondern ein geschlossenes Gebiet zu untersuchen haben. Wir bilden darum das Gebiet der  $z^*$ -Ebene konform durch Inversion auf das Gebiet der  $z$ -Ebene, Bild 2, ab, indem wir

$$z^* = x^* + i y^* = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + i y}$$

setzen.

Aus der Spannungsfunktion  $F^*$  wird für das Gebiet der  $xy$ -Ebene eine neue Spannungsfunktion  $F$  gebildet. Wir schreiben hierzu  $F^* = r^{*2} \varphi_1 + \varphi_2$ ; hierin sind  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  Potentialfunktionen. Dann setzen wir  $F = F^*/r^{*2}$  und erhalten:

$$F = \varphi_1 + r^2 \varphi_2.$$

Da bei der Inversion Potentialfunktionen wieder in Potentialfunktionen übergehen, so ist  $F$  ebenfalls eine Spannungsfunktion. Aus Gl. (1) erhalten wir

$$F = \frac{1}{2} p + c r^2 \ln r + \dots \quad (2).$$

Am Rande wird  $F$  und  $dF$  gleich Null, so daß auf die Scheibe nach Bild 2 keine äußere Belastung wirkt. Dafür tritt im Punkte  $U$  mit  $x=y=0$  eine Singularität auf, deren physikalische Bedeutung wir untersuchen. Hierzu berechnen wir die Verschiebung  $u$  in  $x$ -Richtung. Die Querschnitt  $r$  setzen wir gleich Null, da sie auf die Spannungsverteilung unseres Problems keinen Einfluß hat. Wir erhalten aus Gl. (2):

$$2Gu = c \left[ 2x \ln r - 4y \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - x \right] + \dots \quad (3).$$

Für  $x=0$  also:

$$2Gu_{x=0} = -2\pi c |y| \quad (4).$$

Die zwei Linien  $UB$  und  $UD$  des Bildes 2, die bei der unbelasteten Scheibe auf einer Geraden liegen, bilden infolge der Verschiebung  $u$  den Winkel  $2\pi c/G$ . Den Spannungszustand des Bildes 2 erhalten wir also, indem wir entlang den Linien  $UB$  und  $UD$  dünne keilförmige Streifen ausschneiden und die rechte und linke Hälfte der Scheibe wieder verbinden.

Stellen wir für die rechte Scheibenhälfte eine Lösung auf, und nehmen wir für die linke Hälfte dieselbe Spannungsfunktion, bei der nur  $x$  durch  $-x$  ersetzt ist, so stimmt am Schnitttrande die Normalspannung überein. Wir müssen weiter verlangen, daß am Schnitttrande

die Schubspannung  $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$  oder auch  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  ist. Für den Ansatz nach Gl. (2) trifft das zu; wir bilden für das Glied  $c r^2 \ln r$  die Ableitung nach  $x$  und erhalten  $\frac{\partial}{\partial x} (c r^2 \ln r) = c (2x \ln r + x)$ . Hieraus folgt, daß für die Linien  $UB$  und  $UD$   $\frac{\partial}{\partial x} (r^2 \ln r)$  gleich Null wird.

Wir stellen fest: Entlang der Linien  $UB$  und  $UD$  wird bei der Scheibe nach Bild 2:

$$2Gu_{x=0} = -2\pi c |y| \quad (4)$$

und

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (5).$$

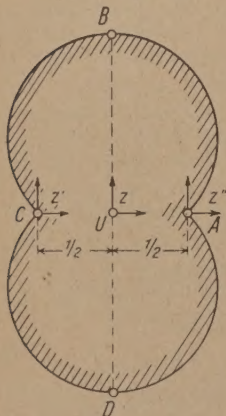


Bild 2



Untersuchen wir die rechte Hälfte der Scheibe, so geben uns Gl. (4) und (5) die Randbedingungen für den Schnitttrand  $DUB$ . Wichtig ist hierbei, daß beide Bedingungen dimensionsgleich sind, denn man findet  $\frac{\partial F}{\partial x}$  durch eine Differentiation von  $F$  nach  $x$ ,  $2Gu$  durch zwei Differentiationen nach  $y$  und einer darauffolgenden Integration nach  $x$ .

An Stelle der Gl. (4) ist es zweckmäßig, die Summe der Gl. (4) und (5) zu nehmen:

$$2Gu_{x=0} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} = -2\pi c|y| \dots \dots \dots (6).$$

Dieses folgt aus der physikalischen Bedeutung der Ausdrücke der linken Seiten. Bilden wir die gleichwertigen Ausdrücke  $-G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$  und  $G\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$  und integrieren wir beide nach  $y$ , so folgt:

$$-\int_0^y G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy = -\int_0^y G\gamma_{xy} dy = -\int_0^y \tau_{xy} dy = \int_0^y \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dy = \frac{\partial F}{\partial x}$$

und

$$\int_0^y G\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy = 2 \int_0^y G \frac{\partial u}{\partial y} dy - \int_0^y G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy = 2Gu + \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Die erhaltenen Integrale sind aber die linken Seiten der Gl. (5) und (6).

Nunmehr wenden wir uns wieder der Funktion  $F$  des Bildes 2 zu. Wir wollen den Spannungszustand im Punkte  $A$  der Scheibe des Bildes 1 oder der Scheibe des Bildes 2 untersuchen. Wir wissen, daß in Innenecken die Spannungen gegen Unendlich gehen. Wir müssen also die Innenecke stark vergrößert annehmen und die dort möglichen Singularitäten untersuchen. Bei dieser Vergrößerung geht das Eckgebiet in eine Scheibe über, die durch zwei Gerade begrenzt ist. Um diese Untersuchung genauer durchzuführen, verwandeln wir das Gebiet der Scheibe des Bildes 2 durch eine weitere Inversion in den Ausschnitt einer Vollebene, der durch zwei Gerade begrenzt ist. Hierzu gehen wir zuerst zu den Koordinaten  $z' = z + \frac{1}{2}$  mit dem Anfangspunkt  $C$  über. Dann führen wir für diesen Punkt die Inversion durch mittels der Umformung  $\zeta' = \frac{1}{z'} = \frac{1}{z + \frac{1}{2}}$ . Unser Gebiet geht in den Ausschnitt der Vollebene nach Bild 3 über. Wir

führen noch die Koordinaten  $\zeta$  mit dem Anfangspunkt in der Spitze des Ausschnittes ein und erhalten:

$$\zeta = \zeta' - 1 = \frac{1}{z + \frac{1}{2}} - 1 = \frac{\frac{1}{2} - z}{\frac{1}{2} + z} \dots \dots (7)$$

oder

$$z = \frac{1}{2} \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \dots \dots \dots (8).$$

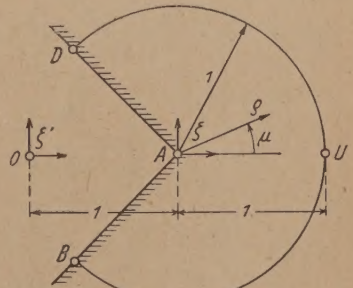


Bild 3

In den Punkten  $U$  und  $0$  treten Singularitäten infolge des Gliedes  $r^2 \ln r$  auf. Wir wollen sie hier nicht näher untersuchen, sondern nur ihr Vorhandensein feststellen<sup>2)</sup>.

Aus  $F$  finden wir durch die vorgenommene Inversion für den Ausschnitt der Vollebene die neue Spannungsfunktion

$$F_A = \frac{F}{r'^2} \quad \text{oder} \quad F = F_A r'^2 \dots \dots \dots (9).$$

Diese Spannungsfunktion  $F_A$  und ihre Ableitung  $\partial F_A / \partial n$  werden am Rande gleich Null. In Polarkoordinaten  $\varrho = e^\lambda$  und  $\mu$  erhalten wir die Randbedingungen:

$$(F_A)_{\mu=\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial F_A}{\partial \mu}\right)_{\mu=\alpha} = 0 \dots \dots \dots (10).$$

<sup>2)</sup> In meinem Aufsätze „Halbebene mit Kreisbogenkerbe“, Z. angew. Math. Mech. 1940 entwickelte ich ein Verfahren, bei dem diese Singularitäten und weitere Singularitäten außerhalb des Scheibengebietes untersucht werden. Dieses Verfahren könnte auch für das vorliegende Problem angewandt werden. Es würde aber keine Auskunft über das Verhalten der Spannungsfunktion in der Umgebung des Punktes  $A$  geben.



Wir werden im Abschnitt C für den Ebenen-Ausschnitt ein vollständiges System von Einzellösungen angeben, die diese Randbedingungen erfüllen. Diese Einzellösungen multiplizieren wir mit noch frei wählbaren Beiwerten. Diese Darstellung der Lösung stellt eine Entwicklung der Funktion  $F_A$  in eine Reihe nach  $\varrho$  dar, wobei die Exponenten von  $\varrho$  nicht ganzzahlig zu sein brauchen. Bei einer beschränkten Anzahl von Gliedern erhalten wir nur eine Näherungslösung. Dann gehen wir wieder zur Spannungsfunktion  $F$  über und bestimmen die Beiwerte so, daß die Randbedingungen Gl. (5) und (6) näherungsweise erfüllt sind. Ein bestimmtes Glied der Summe gibt uns dann das Verhalten der Spannungen in der Nähe des Punktes  $A$ . Aus dem Wert der Spannungsfunktion  $F$  im Punkte  $U$  erhalten wir weiter den Wert  $c$  in Abhängigkeit von  $p$ .

### C. Ebenen-Ausschnitt mit spannungsfreien Rändern

Bild 4a bis d zeigt den Ebenen-Ausschnitt für  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$  und  $\pi$ . Sind die Ränder  $\mu = \pm \alpha$  spannungsfrei, so ist für diese  $F_A = \frac{\partial F_A}{\partial \mu} = 0$ . Nunmehr bilden wir Einzellösungen, die diese Randbedingungen erfüllen. Hierbei beschränken wir uns auf zur  $\xi$ -Achse symmetrische Lösungen. Wir setzen mit  $\zeta = \xi + i\eta = e^{\lambda+i\mu}$  und  $\bar{\zeta} = \xi - i\eta = e^{\lambda-i\mu}$  für eine Einzellösung:

$$F_A = \frac{1}{2} [a(\zeta^{n+1} + \bar{\zeta}^{n+1}) + \varrho^2(\zeta^{n-1} + \bar{\zeta}^{n-1})] \dots \dots \dots (11).$$

Beide Glieder in der eckigen Klammer sind in  $\varrho$  von gleicher Potenz;  $a$  und  $n$  sind so zu wählen, daß die zwei Randbedingungen erfüllt sind. In Polarkoordinaten lautet der Ansatz der Einzellösung:

$$F_A = \varrho^{n+1} [a \cos(n+1)\mu + \cos(n-1)\mu] \dots \dots \dots (12).$$

Die Werte  $a$  und  $n$  werden aus den Randbedingungen für  $\mu = \pm \alpha$  berechnet.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Aus } (F_A)_{\mu=\alpha} = 0 \text{ folgt: } a \cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 0, \\ \text{aus } \left(\frac{\partial F_A}{\partial \mu}\right)_{\mu=\alpha} = 0 \text{ folgt: } a(n+1)\alpha \sin(n+1)\alpha + (n-1)\alpha \sin(n-1)\alpha = 0 \end{array} \right\} (13).$$

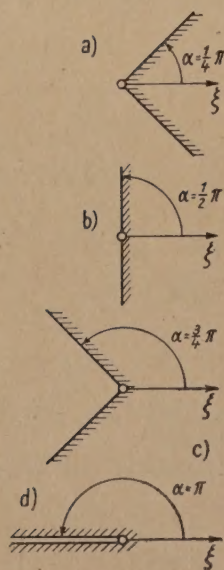


Bild 4

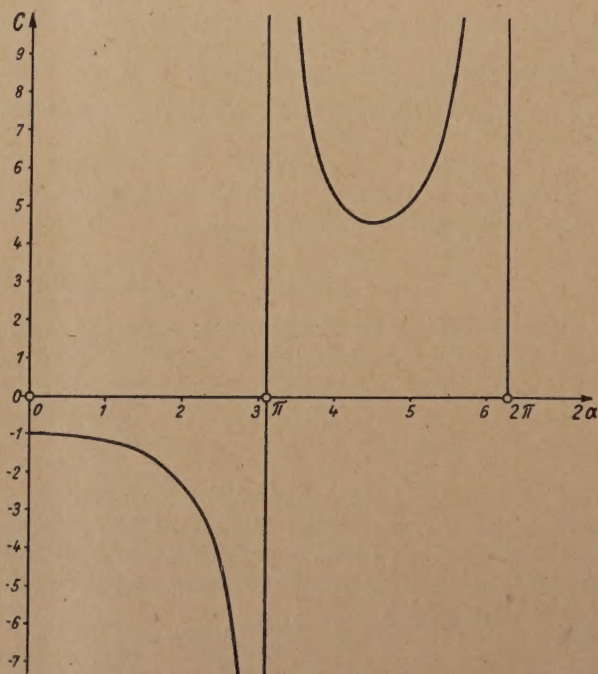


Bild 5

Falls  $n$  gefunden ist, so erhält man aus der ersten Gleichung

$$a = -\frac{\cos(n-1)\alpha}{\cos(n+1)\alpha} \dots \dots \dots (14).$$

Um  $n$  zu finden, beseitigen wir  $a$  aus beiden Gl. (13) und erhalten nach Umformung:

$$\frac{2n\alpha}{\sin 2n\alpha} = -\frac{2\alpha}{\sin 2\alpha} \dots \dots \dots (15).$$



Die rechte Seite gibt die Konstante  $C = -\frac{2\alpha}{\sin 2\alpha}$ , die von  $\alpha$ , dem gewählten halben Ausschnittswinkel abhängt. Diese Abhängigkeit im Bereiche  $0 \leq \alpha \leq \pi$  zeigt Bild 5. Für  $\alpha=0$  wird  $C = -1$ , für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  wird  $C = \mp \infty$ , dann nimmt  $C$  bis etwa 4,61 für  $\alpha=4,5$  ab, um wieder bis  $C = +\infty$  für  $\alpha = \pi$  anzusteigen. Für einen festliegenden Wert  $\alpha$ , bzw.  $C$  sind nach Gl. (15) die Lösungen für  $2n\alpha$  zu finden. Gl. (15) hat außer reellen Lösungen auch komplexe von der Form  $2(n' + in'')\alpha$ . Diese komplexen Lösungen müssen wir beachten, damit wir ein vollständiges System von Lösungen erhalten.

Wir setzen  $n = n' + in''$  in Gl. (15) ein:

$$2(n' + in'')\alpha = C \sin 2(n' + in'')\alpha.$$

Die Gleichung zerlegen wir in Real- und Imaginärteil; dieses gibt nach Umformung:

$$\cos 2n'\alpha = \frac{2n''\alpha}{C \sin 2n''\alpha} \quad (16)$$

und

$$\operatorname{Cof} 2n''\alpha = \frac{2n'\alpha}{C \sin 2n''\alpha} \quad (17).$$

Durch beide Gleichungen ist  $2n''\alpha$  als Funktion von  $2n'\alpha$  gegeben. In einem Koordinatensystem der Veränderlichen  $2n'\alpha$  und  $2n''\alpha$  tragen wir beide Kurvenscharen auf, die aus den Gl. (16) und (17) folgen. Zur ersten Kurvenschar gehört auch die horizontale Achse  $2n''\alpha=0$ , zur zweiten die vertikale Achse  $2n'\alpha=0$ . In den Bildern 6a bis d sind die Kurven für  $\alpha_1=0$ ,  $C_1=-1$ ,  $\alpha_2=1,25$ ,

$C_2=-4,59$ ,  $\alpha_3=\frac{\pi}{2}$  oder  $\pi$ ,  $C_3=\infty$ ,  $\alpha_4=\frac{3}{4}\pi=2,356$ ,  $C_4=4,712$  auf-

gezeichnet. Die Kurvenschar nach Gl. (16) ist ausgezogen, die Kurvenschar nach Gl. (17) gestrichelt. Die Bilder zeigen deutlicher als Worte, wie sich die Kurven mit  $\alpha$  bzw.  $C$  ändern. Die Schnittpunkte beider Kurvenscharen geben die gesuchten Werte  $2n\alpha = 2n'\alpha + i2n''\alpha$ . Der Wert  $2n'\alpha + 2n''\alpha = 0$  hat keine Bedeutung, da hieraus keine Lösung für  $F_A$  folgt.

Um die Vollständigkeit des Systems zu zeigen, ist die Differentialgleichung in den Koordinaten  $\lambda = \ln \varrho, \mu$  auszudrücken und durch ein System von Differenzengleichungen anzunähern. Für letzteres läßt sich zeigen, daß man mit einem Ansatz, der unserem entspricht, alle vorgegebenen Randwerte und Randneigungen für  $\lambda = \lambda_1$  und  $\lambda = \lambda_2$  erhalten kann. Für das System der Differenzengleichungen ist das System vollständig, also auch für die durch Grenzübergang entstehende Differentialgleichung.

Für komplexe Werte für  $n$  werden auch die dazugehörigen Werte für  $a$  komplex, aus Gl. (14) folgt:

$$\left. \begin{aligned} a = a' + ia'' &= -\frac{\cos(n' + in'' - 1)\alpha}{\cos(n' + in'' + 1)\alpha} \\ &= -\frac{\cos(n' - 1)\alpha \operatorname{Cof} n''\alpha - i \sin(n' - 1)\alpha \operatorname{Sin} n''\alpha}{\cos(n' + 1)\alpha \operatorname{Cof} n''\alpha - i \sin(n' + 1)\alpha \operatorname{Sin} n''\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (18).$$

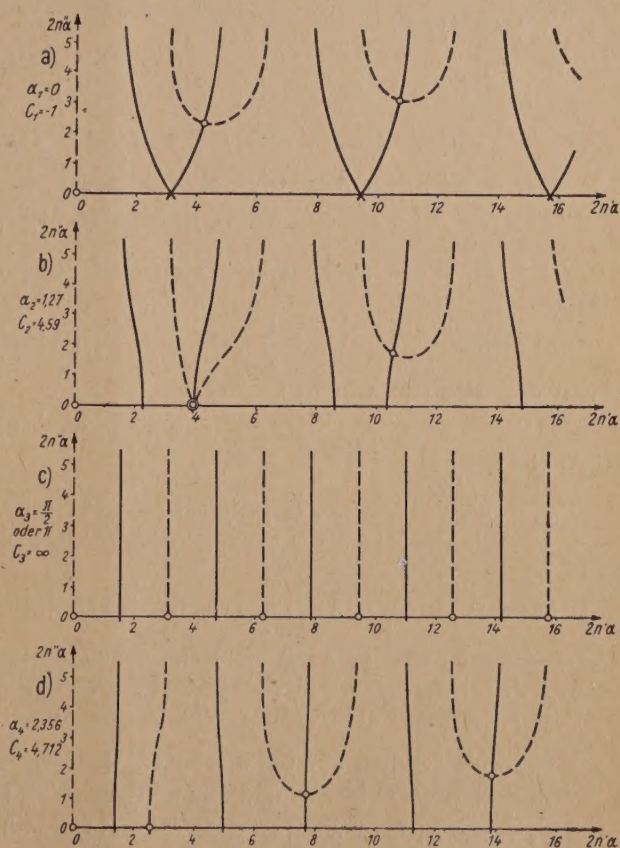


Bild 6 a—d



Durch Trennung in Real- und Imaginärteil wird daraus  $a'$  und  $a''$  gefunden. Für unser Beispiel mit  $\alpha = \frac{3}{4}\pi$  lauten die ersten drei Lösungen, die wir mit den Indizes  $I, II, III$  versehen:

$$\begin{aligned} 2n_I \quad \alpha &= 0,817\pi &= 2,562 &= 2\alpha \cdot 0,544 & a_I &= 0,5413, \\ 2n_{II} \quad \alpha &= 2,446\pi + i0,350\pi &= 7,684 + i1,10 &= 2\alpha(1,632 + i0,234) & a_{II} &= -0,0639 + i0,503 \\ 2n_{III} \quad \alpha &= 4,461\pi + i0,563\pi &= 14,015 + i1,77 &= 2\alpha(2,978 + i0,375) & a_{III} &= -0,0299 + i0,706 \end{aligned}$$

Ist  $n$  und damit  $a$  komplex, so stellt sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil des Ausdruckes nach Gl. (11) eine Lösung dar, so daß jedem komplexen Werte  $n$  zwei Lösungen für  $F_A$  entsprechen. Zur Berechnung dieser Ausdrücke zerlegen wir  $\frac{1}{2}(\zeta^{n-1} + \bar{\zeta}^{n-1})$  in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\zeta^{n-1} + \bar{\zeta}^{n-1}) &= \\ &= \frac{1}{2}[e^{(n'+i n''-1)(\lambda+i\mu)} + e^{(n'+i n''-1)(\lambda-i\mu)}] = \frac{1}{2}e^{(n'-1)\lambda}(\cos n''\lambda + i \sin n''\lambda) \\ &\quad [e^{-n''\mu}(\cos(n'-1)\mu + i \sin(n'-1)\mu) + e^{n''\mu}(\cos(n'-1)\mu - i \sin(n'-1)\mu)] \\ &= e^{n'-1}[\cos n''\lambda \cos n''\mu \cos(n'-1)\mu + \sin n''\lambda \sin n''\mu \sin(n'-1)\mu] \\ &\quad + i e^{n'-1}[-\cos n''\lambda \sin n''\mu \sin(n'-1)\mu + \sin n''\lambda \cos n''\mu \cos(n'-1)\mu]. \end{aligned}$$

Sowohl Realteil als auch Imaginärteil sind entsprechend unserm Ansatz symmetrisch zur  $\xi$ -Achse.

In gleicher Weise wird  $\frac{1}{2}(\zeta^{n+1} + \bar{\zeta}^{n+1})$  zerlegt. Weiter setzen wir  $a = a' + ia''$  und erhalten den Realteil von  $F_A$ :

$$F_{A\text{re}} = \varphi_1 + \varrho^2 \varphi_2.$$

Hierin ist:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= a' \varrho^{n'+1} [\cos n''\lambda \cos n''\mu \cos(n'+1)\mu + \sin n''\lambda \sin n''\mu \sin(n'+1)\mu] \\ &\quad + a'' \varrho^{n'+1} [\cos n''\lambda \sin n''\mu \sin(n'+1)\mu - \sin n''\lambda \cos n''\mu \cos(n'+1)\mu] \\ \text{und} \\ \varphi_2 &= \varrho^{n'-1} [\cos n''\lambda \cos n''\mu \cos(n'-1)\mu + \sin n''\lambda \sin n''\mu \sin(n'-1)\mu] \end{aligned} \right\} \quad (19).$$

Wir können  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  auch als Realteile komplexer Funktionen  $f_1(\lambda + i\mu)$  und  $f_2(\lambda + i\mu)$  betrachten. Dann lauten die konjugierten Potentialfunktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$ , das sind die Imaginärteile derselben Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ , wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= a' \varrho^{n'+1} [\cos n''\lambda \sin n''\mu \sin(n'+1)\mu - \sin n''\lambda \cos n''\mu \cos(n'+1)\mu] \\ &\quad + a'' \varrho^{n'+1} [-\cos n''\lambda \sin n''\mu \cos(n'+1)\mu - \sin n''\lambda \cos n''\mu \sin(n'+1)\mu], \\ \psi_2 &= \varrho^{n'-1} [\cos n''\lambda \sin n''\mu \sin(n'-1)\mu - \sin n''\lambda \cos n''\mu \cos(n'-1)\mu] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Ich gebe die Ausdrücke an, da sie später gebraucht werden.

Ebenso schreiben wir für den Imaginärteil von  $F_A$ :

$$F_{A\text{im}} = \varphi_1 + \varrho^2 \varphi_2.$$

Hierin ist:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= a' \varrho^{n'+1} [-\cos n''\lambda \sin n''\mu \sin(n'+1)\mu + \sin n''\lambda \cos n''\mu \cos(n'+1)\mu] \\ &\quad + a'' \varrho^{n'+1} [\cos n''\lambda \cos n''\mu \cos(n'+1)\mu + \sin n''\lambda \sin n''\mu \sin(n'+1)\mu] \\ \text{und} \\ \varphi_2 &= \varrho^{n'-1} [-\cos n''\lambda \sin n''\mu \sin(n'-1)\mu + \sin n''\lambda \cos n''\mu \cos(n'-1)\mu] \end{aligned} \right\} \quad (21).$$

Die konjugierten Potentialfunktionen sind jetzt:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= a' \varrho^{n'+1} [\cos n''\lambda \sin n''\mu \cos(n'+1)\mu + \sin n''\lambda \cos n''\mu \sin(n'+1)\mu] \\ &\quad + a'' \varrho^{n'+1} [\cos n''\lambda \cos n''\mu \sin(n'+1)\mu - \sin n''\lambda \sin n''\mu \cos(n'+1)\mu], \\ \psi_2 &= \varrho^{n'-1} [\cos n''\lambda \sin n''\mu \cos(n'-1)\mu + \sin n''\lambda \cos n''\mu \sin(n'-1)\mu] \end{aligned} \right\} \quad (22).$$

Wir werden die Ausdrücke später für den Wert  $\varrho=1$ ,  $\lambda=0$  benötigen. Hierfür vereinfachen sich alle Ausdrücke, da dann  $\cos n''\lambda=1$  und  $\sin n''\lambda=0$  wird.



Sowohl für die Realteile als auch für die Imaginärteile numerieren wir laufend die Funktionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  und bilden mit noch freiwählbarem Koeffizienten  $-\frac{\pi}{2} c a_k$  die Potentialfunktionen

$$\Phi_1 = -\frac{\pi}{2} c \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{1k} \quad \text{und} \quad \Phi_2 = -\frac{\pi}{2} c \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{2k}.$$

Hierbei sind in beiden Summen die Werte  $a_k$  dieselben. Aus  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  wird jetzt die Spannungsfunktion für  $F_A$  für den Ebenen-Ausschnitt gebildet:

$$F_A = \Phi_1 + \varrho^2 \Phi_2.$$

Für das Gebiet  $\varrho < 1$  sind hierbei für  $n' + 1$  positive Werte zu nehmen, für das Gebiet  $\varrho > 1$  negative Werte. In dem Schnitttrande  $\varrho = 1$  müssen beide Funktionen ineinander übergehen und die Singularität an der Stelle  $\varrho = 1, \mu = 0$  bilden. Dieses werden wir jedoch in der  $xy$ -Ebene durchführen. Hierzu bilden wir aus  $F_A$  die Spannungsfunktion  $F$  der Scheibe in der  $xy$ -Ebene.

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{F_1}{\varrho'^2} = \frac{(\Phi_1 + \varrho^2 \Phi_2)}{\varrho'^2} = [\Phi_1 + (\varrho'^2 - 2\xi' + 1)\Phi_2] : \varrho'^2 = r'^2 \Phi_1 + (r'^2 - 2x' + 1)\Phi_2 \\ F &= \left(r^2 + x + \frac{1}{4}\right) \Phi_1 + \left(r^2 - x + \frac{1}{4}\right) \Phi_2 = r'^2 \Phi_1 + r''^2 \Phi_2 \end{aligned} \right\} (23).$$

Hierin sind  $r'$  und  $r''$  die Abstände von den Eckpunkten  $C$  und  $A$ .

Aus  $F$  finden wir  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0}$  und  $2Gu_{x=0} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0}$ , um diese in die Randbedingungen des

Schnitttrandes Gl. (5) und (6) einzusetzen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x(\Phi_1 + \Phi_2) + (\Phi_1 - \Phi_2) + \left(r^2 + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right) + x \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right).$$

Für  $x = 0$  folglich:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} = (\Phi_1 - \Phi_2)_{x=0} + \left(y^2 + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)_{x=0}.$$

Weiter ist mit  $v = 0$ :

$$\begin{aligned} 2G \frac{\partial u}{\partial x} &= 2G\varepsilon_x = \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2(\Phi_1 + \Phi_2) + 4y \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right) + \left(r^2 + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}\right) \\ &\quad + x \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}\right). \end{aligned}$$

Mit  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  und  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$  wird

$$\begin{aligned} 2Gu &= -\left(r^2 + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right) + 2x(\Phi_1 + \Phi_2) - 4y(\Psi_1 + \Psi_2) - x \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right) \\ &\quad + \Phi_1 - \Phi_2 - \frac{\pi}{2} c a_0. \end{aligned}$$

Hierin ist  $-\frac{\pi}{2} c a_0$  eine beliebige Integrationskonstante, die einer starren Verschiebung entspricht. Für  $x = 0$  folgt:

$$2Gu_{x=0} = -\left(y^2 + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)_{x=0} - 4y(\Psi_1 + \Psi_2)_{x=0} + (\Phi_1 - \Phi_2)_{x=0} - \frac{\pi}{2} c a_0$$

und

$$2Gu_{x=0} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} = 2(\Phi_1 - \Phi_2)_{x=0} - 4y(\Psi_1 + \Psi_2)_{x=0} - \frac{\pi}{2} c a_0.$$

Die Randbedingungen für den Schnitttrand  $x = 0$ , Gl. (5) und (6) lauten hiermit:

$$(\Phi_1 - \Phi_2)_{x=0} + \left(y^2 + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad \dots \dots \dots (24)$$

und

$$2(\Phi_1 - \Phi_2)_{x=0} - 4y(\Psi_1 + \Psi_2)_{x=0} - \frac{\pi}{2} c a_0 = -4\frac{\pi}{2} c |y| \quad \dots \dots \dots (25).$$



Aus diesen beiden Gleichungen sind die Beiwerte der Einzellösungen und  $a_0$  zu finden. Nehmen wir eine Näherungslösung mit den zwei Einzellösungen  $n_I$  und  $n_{II} = n'_{II} + i n''_{II}$ , so stehen uns drei Beiwerte und  $a_0$  zur Verfügung. Wir können folglich auf der Linie  $UB$  die beiden Gleichungen an zwei beliebigen Stellen befriedigen. Dieses ist einfacher als die Anwendung eines Minimalproblems, da wir damit die analytisch nicht durchführbaren Integrationen vermeiden. Zur Erleichterung der Rechnung gehen wir hierzu wieder in das  $\zeta$ -Koordinatensystem über und drücken die beiden Gleichungen in  $\varrho$  und  $\mu$  aus. Die Punkte  $x=0$  entsprechen den Punkten  $\varrho=1$ , weiter ist nach Gl. (8):  $z = \frac{1}{2} \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$ , für  $x=0$ ,  $\varrho=1$  folglich

$$y = -\frac{1}{2} \frac{\sin \mu}{1 - \cos \mu} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \dots \dots \dots (26).$$

Um  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$  zu finden, überlegen wir uns, daß die Richtung von  $dx$  in die Richtung von  $-d\varrho$  übergeht und infolge der Inversion

$$\frac{d\varrho}{dx} = -\frac{1}{r'^2} = -\frac{1}{y^2 + \frac{1}{4}}$$

ist.

Die Gl. (24) und (25) lauten hiermit

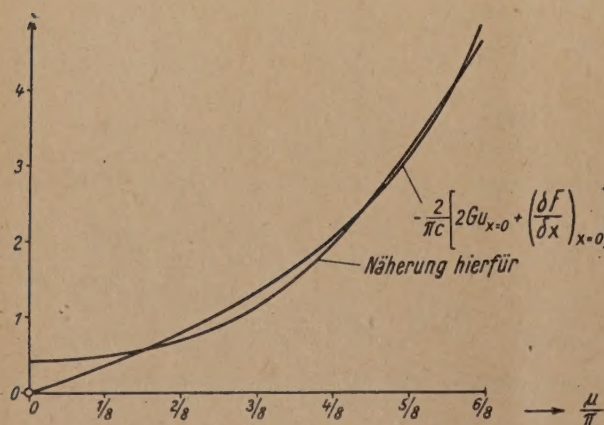
$$(\Phi_1 - \Phi_2)_{\varrho=1} - \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=1} = 0 \dots \dots \dots (27)$$

und

$$2(\Phi_1 + \Phi_2)_{\varrho=1} - \frac{\pi}{2} c a_0 + 2 \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} (\Psi_1 + \Psi_2)_{\varrho=1} = -\frac{\pi}{2} c 2 \left| \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \right| \dots \dots \dots (28).$$

#### Auswertung für das Beispiel und Ergebnisse

Gewählt sind für  $\varrho=1$  die Punkte  $\mu = \frac{1}{4} \alpha$  und  $\frac{3}{4} \alpha$ ; die Beiwerte  $a_k$  und  $a_0$  sind so



a)

berechnet, daß an diesen Stellen Gl. (27) und (28) erfüllt sind. Für andere Punkte des Schnittrandes weichen dann die Werte der linken Seiten der Gleichungen von den Werten der rechten Seiten ab. Das Ergebnis ist im Bilde 7a und 7b dargestellt, hierbei zeigt Bild 7a den Verlauf von  $2 \left| \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \right|$  und die erhaltene Näherungslösung hierfür. Die Differenz stellt den Fehler dar, der in einem fünffachen Maßstabe im Bilde 7b aufgetragen ist; ebenso ist in diesem Bilde die Abweichung der linken Seite der Gl. (27) vom Sollwerte Null aufgezeichnet.

Für die Stelle  $x=y=0$  finden wir  $F$ :

$$F_{x=y=0} = \frac{1}{4} (\Phi_1 + \Phi_2)_{x=y=0} = \frac{1}{4} (\Phi_1 + \Phi_2)_{\varrho=1, \mu=0} = -\frac{\pi}{2} c \cdot 0,425.$$

b)

Da der Wert für  $F$  an dieser Stelle gleich  $\frac{1}{2} p$  ist, so folgt

$$c = 0,75 p \dots \dots (29).$$

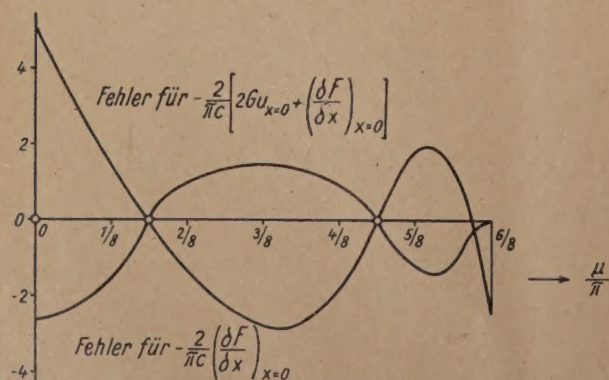


Bild 7a u. b



Die Spannung bei Punkt  $A$  des Ebenen-Ausschnittes wird unendlich und zwar gilt in der Nähe dieses Punktes

$$F_{A, \text{ Punkt } A} = \frac{\pi}{2} c 0,545 \varrho^{1,544} (-0,5413 \cos 1,544 \mu + \cos (-0,456) \mu).$$

Da der Exponent von  $\varrho$  kleiner als 2 ist, so gehen die zweiten Ableitungen im Punkte  $\varrho$  gegen  $\infty$  wie  $\varrho^{-0,456}$ . Die Singularität der Funktion  $F$  überträgt sich bei der Inversion auf die Scheibenprobleme der anderen Gebiete, der Exponent von  $\varrho$  und die Abhängigkeit von  $\mu$  bleiben erhalten, nur der Zahlenwert der Funktion ändert sich, falls der Abstand vom Umkehrpole nicht gleich 1 ist.

Für Punkt  $A$  des Bildes 2 erhalten wir denselben Ausdruck für  $F$ , wenn wir dort  $\varrho$  vom Punkte  $A$  und  $\mu$  von der nach links gerichteten Achse abmessen.

Für den Punkt  $A$  des Bildes 1 wird

$$F^* = \frac{\pi}{2} c 0,545 \left(\frac{1}{2}\right)^{1,088} \varrho^{1,544} (-0,5413 \cos 1,544 \mu + \cos 0,456 \mu).$$

Hierin ist  $\left(\frac{1}{2}\right)$  der Abstand des Punktes  $A$  vom Umkehrpole im Bilde 2 und der Exponent 1,088 ist der Wert für  $2 n_r$ . Hiermit ist das Problem gelöst.

Neuartig ist bei diesem Verfahren das Aufstellen der Einzellösungen für den Ebenen-Ausschnitt und die Berücksichtigung der Randbedingungen eines inneren Schnitttrandes und der dort auftretenden Singularität.

Eingegangen: 15. 6. 1950.

## Graphische Integrationsverfahren für die Meißnerschen Linienbilder bei Differentialgleichungssystemen und Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung

Von Rudolf Ludwig\*) in Braunschweig

*Für Differentialgleichungssysteme und Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung werden graphische Integrationsverfahren angegeben, die durch Erweiterung der Methoden entstehen, die in früheren Arbeiten entwickelt worden sind. Die Fehlerabschätzung ist einfach durchzuführen.*

*For systems of differential equations and differential equations of the  $n$ -th order, graphical methods of integration are given, that are generalizations of the methods explained in previous papers. The estimation of the error is easily accomplished.*

*L'auteur donne des méthodes graphiques pour l'intégration de systèmes d'équations différentielles et d'équations différentielles d'ordre  $n$ ; elles sont développées par généralisation des méthodes publiées précédemment. L'évaluation d'erreurs se fait simplement.*

Даются графические Методы интегрирования систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений порядка  $n$ . Эти методы являются развитием методов, разработанных в прежних работах автора. Оценка погрешности может быть просто произведена.

### Einleitung

In zwei Arbeiten<sup>1)</sup> wurden neue Methoden entwickelt, um mit den Meißnerschen Linienbildern bestimmte Integrale und DGl<sup>n</sup>.<sup>2)</sup> 1. Ordnung graphisch zu integrieren. Die Verfahren für DGl<sup>n</sup>. 2. und höherer Ordnung gehen aus denen für DGl<sup>n</sup>. 1. Ordnung hervor, während Meißner (I [1]) einen anderen Weg wählt, der sich aber schwieriger analytisch erfassen läßt und für den auch keine Fehlerabschätzung existiert. Für die hier dargestellten Verfahren ist eine solche durchgeführt worden in Anlehnung an eine von Tollmien (II [2]) stammende Methode.

### 1. Allgemeines zur näherungsweisen Integration und Restabschätzung von Differentialgleichungssystemen 1. Ordnung

Gegeben sei das DGl<sup>n</sup>-System

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n), \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1)$$

\*) Aus dem Institut für Angewandte Mathematik und Darstellende Geometrie der Technischen Hochschule Braunschweig (Prof. Dr. F. Rehbock).

<sup>1)</sup> „Analytische Untersuchungen und konstruktive Erweiterungen der graphischen Integrationsverfahren von Grammel und Meißner“. Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 120–130 und „Graphische Integrationsverfahren für die Meißnerschen Linienbilder bei Differentialgleichungen 1. Ordnung“. Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 169–178. Hinweis auf diese beiden Arbeiten werden durch Vorsetzen einer „I“ oder „II“ gekennzeichnet.

<sup>2)</sup> DGl<sup>n</sup> = Differentialgleichung(en), Gl<sup>n</sup> = Gleichung(en).



mit den Anfangsbedingungen

$$y_k(x_0) = y_{k0} \quad \dots \quad (1^*)$$

der  $n$  Variablen  $y_1, \dots, y_n$ . Von den  $n$  Funktionen  $f_k$  werde gefordert, daß sie in einem Gebiet  $\mathcal{G} \mid x - x_0 \mid \leq a, \mid y_k - y_{k0} \mid \leq b_k$  1. beschränkt seien:

$$\mid f_k(x, y_1, \dots, y_n) \mid \leq K \quad \dots \quad (2)$$

und 2. daß für sie die Lipschitzbedingungen gelten:

$$\mid f_k(x, y_1, \dots, y_n) - f_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \mid \leq M \sum_{\lambda=1}^n \mid y_\lambda - \bar{y}_\lambda \mid, \quad (k = 1, \dots, n) \quad \dots \quad (3).$$

Setzt man die Differenzierbarkeit der Funktionen  $f_k$  voraus, so gelten die einfacheren Bedingungen

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial y_\lambda} \right| \leq M, \quad (k, \lambda = 1, \dots, n) \quad \dots \quad (3^*).$$

Die exakten Lösungen des Systems (1) mit den Anfangswerten (1\*) lauten:

$$y_k(x) = y_{k0} + \int_{x_0}^x f_k(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) dx \quad \dots \quad (4).$$

Dem System (1) soll das Näherungssystem (s. auch II [3])

$$\frac{dy_k}{dx} = \bar{f}_k(x, y_1, \dots, y_n) = f_k(x, y_1, \dots, y_n) + \vartheta_k(x, y_1, \dots, y_n) \quad \dots \quad (5)$$

gegenübergestellt werden, dessen Lösungen den geänderten Anfangsbedingungen

$$y_k(x_0) = \bar{y}_{k0} = y_{k0} + \delta_k \quad \dots \quad (6)$$

genügen sollen. Die Lösungen dieses Systems seien  $\bar{y}_k(x)$ , es gilt also:

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_k(x) - y_{k0} &= \int_{x_0}^x \bar{f}_k(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) dx \\ &= \int_{x_0}^x f_k(x, \bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)) dx + \int_{x_0}^x \vartheta_k(x, \bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)) dx \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (7)$$

Dieselben Funktionen  $\bar{y}_k(x)$  sollen als (nullte) Näherungswerte zur iterativen Lösung des gegebenen Systems (1) gewählt werden. Es gilt daher:

$$\bar{y}_k^{(1)} - y_{k0} = \int_{x_0}^x f_k(x, \bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)) dx \quad \dots \quad (8).$$

Aus (7) und (8) folgt:

$$\bar{y}_k^{(1)}(x) - \bar{y}_k(x) = -\delta_k - \int_{x_0}^x \vartheta_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) dx.$$

Für die Integrale wird eine Abschätzung ausgeführt:

$$\left| \int_{x_0}^x \vartheta_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) dx \right| \leq \Theta \mid x - x_0 \mid \quad \dots \quad (9)$$

und man erhält:

$$\mid \bar{y}_k^{(1)} - \bar{y}_k \mid \leq \mid \delta_k \mid + \Theta \mid x - x_0 \mid \quad \dots \quad (10).$$

Setzt man das Iterationsverfahren fort, so findet man unter Anwendung der Lipschitzbedingungen:

$$\mid \bar{y}_k^{(\mu)}(x) - \bar{y}_k^{(\mu-1)}(x) \mid \leq M \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^n \mid \bar{y}_k^{(\mu-1)} - \bar{y}_k^{(\mu-2)} \mid dx$$

und daraus die Abschätzungsformel:

$$\mid y_k(x) - \bar{y}_k(x) \mid \leq \mid \delta_k \mid e^{nM \mid x - x_0 \mid} + \frac{\Theta}{nM} (e^{nM \mid x - x_0 \mid} - 1) \quad \dots \quad (11).$$

Erfüllen die Näherungslösungen  $\bar{y}_k$  die gleichen Anfangsbedingungen wie die exakte Lösung, ist also  $\delta_k = 0$ , so gilt:

$$\boxed{\mid y_k(x) - \bar{y}_k(x) \mid \leq \frac{\Theta}{nM} (e^{nM \mid x - x_0 \mid} - 1)} \quad \dots \quad (11^*).$$

Wie in (I) und (II) werde vorausgesetzt, daß die Werte der Funktion  $\bar{y}_k$  durch iterative Lösung (geometrisch konstruktiv oder numerisch) einer Gl. von der Form:

$$\bar{y}_{k, m+\lambda} - \bar{y}_{k, m} = h \sum_{v=0}^{\lambda} \alpha_v f_k(x_{m+v}, \bar{y}_{1, m+v}, \dots, \bar{y}_{n, m+v})$$



gewonnen werden, dabei bedeutet  $\bar{y}_{k,\lambda} = \bar{y}_k(x_0 - \lambda h)$ . Die Lösung des Näherungssystems kann man schreiben:

$$\begin{aligned}\bar{y}_{k,m+\lambda} - \bar{y}_{k,m} &= \int_{x_m}^{x_m + \lambda h} f_k(x, \bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)) dx \\ &= \int_{x_m}^{x_m + \lambda h} f_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) dx + \int_{x_m}^{x_m + \lambda h} \vartheta_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}) dx.\end{aligned}$$

Da alle Funktionswerte nach Einsetzen der Lösung  $y_k(x)$  nur Funktionen von  $x$  sind, kann man schreiben:

$$f_k(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = F_k(x).$$

Aus obiger Gl. folgt dann:

$$\int_{x_m}^{x_m + \lambda h} \vartheta_k(x) dx = h \sum_{r=0}^{\lambda} \alpha_r F_k(x_{m+r}) - \int_{x_m}^{x_m + \lambda h} F_k(x) dx.$$

Dies ist aber wieder der Integrationsfehler  $R_k^{(\lambda)}$

$$\int_{x_m}^{x_m + \lambda h} \vartheta_k(x) dx = R_k^{(\lambda)} = \lambda h \Theta_{k,m},$$

also

$$\Theta_{k,m} = \frac{1}{\lambda h} R_k^{(\lambda)},$$

wobei  $R_k^{(\lambda)}$  für die gefundenen Näherungsfunktionen  $y_k(x)$  zu bilden ist. Für das gesamte Integrationsbereich gilt dann:

$$\left| \int_{x_0}^x \vartheta_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) dx \right| \leq \Theta |x - x_0| \leq |x - x_0| |\Theta_{k,m}|_{\max} \quad \Theta \leq \frac{1}{\lambda h} |R_k^{(\lambda)}|_{\max} \quad (12).$$

Dieser Wert  $\Theta$  ist dann in die Fehlergleichung (11) bzw. (11\*) einzusetzen.

## 2. Die graphische Integration von Differentialgleichungssystemen 1. Ordnung (Bild 1)

An dem System von DGl. mit zwei von  $t$  abhängigen Variablen  $x$  und  $y$

$$\left. \begin{aligned}x' &= f_1(t, x, y) \\ y' &= f_2(t, x, y)\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

soll das Verfahren gezeigt werden. Die Konstruktionen bieten prinzipiell nichts Neues. Während bei einer DGl. alle Konstruktionen in einer Ebene durchgeführt wurden, sind hier zwei Ebenen notwendig, eine  $x$ - und eine  $y$ -Ebene (im allgemeinen Fall  $n$  Ebenen  $y_k$ ). In jeder Ebene verfährt man genau so wie bei den einzelnen DGl. Integriert man graphisch also z. B. nach dem Sehnenverfahren mit Iteration, so bedeutet dies (s. II, Abschn. 3) in Formeln geschrieben:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k+1} &= x_k + [f_1(t_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k) + f_1(t_{k+1}, \bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1})] \frac{h}{2}, \\ \bar{y}_{k+1} &= \bar{y}_k + [f_2(t_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k) + f_2(t_{k+1}, \bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1})] \frac{h}{2}.\end{aligned}$$

Unter Anwendung der Lipschitz-Bedingungen mit der Konstanten  $M$ :

$$\left| \frac{\partial f_\lambda}{\partial x} \right| \leq M,$$

$$\left| \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} \right| \leq M, \quad (\lambda = 1, 2)$$

lautet die Konvergenzbedingung für das Iterationsverfahren [1]:

$$h M < 1 \quad (14).$$

Die Fehlerabschätzung ergibt:

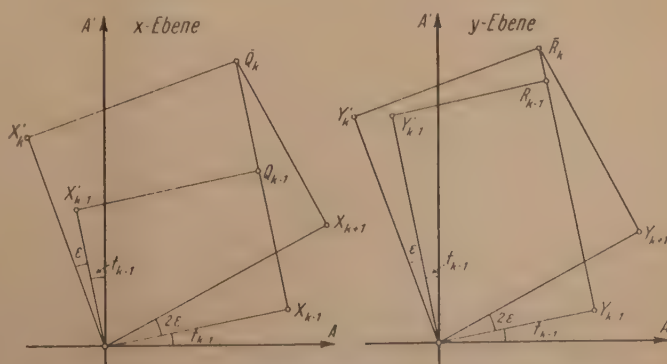


Bild 1. Tangentenverfahren für ein System von DGl. 1. Ordnung

$$|x - \bar{x}| = |y - \bar{y}| \leq \frac{h^2}{24 M} [e^{2 M (t - t_0)} - 1] |f''_\lambda(t, \bar{x}, \bar{y})|_{\max} \quad (15).$$



Bei dem allgemeinen System (1) mit der Lipschitz-Konstanten (3) findet man für die Sehn-Integration:

a) als Konvergenzbedingung

$$\left. \begin{aligned} n \frac{h}{2} M &< 1 \\ h M &< \frac{2}{n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

b) als Fehlerabschätzung:

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \frac{h^2}{12} |f_k''(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)|_{\max} \\ |y_k - \bar{y}_k| &\leq \frac{\Theta}{n M} (e^{nM|x-x_0|} - 1), \quad (k = 1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Je größer also die Zahl der Variablen ist, desto kleiner muß man die Schrittkenzahl  $hM$  wählen.

Bei dem wohl meistens anzuwendenden Sehn-Tangenten-Verfahren lauten die entsprechenden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad M \operatorname{tg} h &< \frac{3}{n}, \quad \text{bzw.} \quad Mh \leq \frac{3}{n} \\ \Theta &= \frac{h^4}{180} [f_k^{\text{IV}}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) + 10 f_k''(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) + 9 f_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)]_{\max} \end{aligned} \right\} (18).$$

$$b) \quad |y_k - \bar{y}_k| \leq \frac{\Theta}{n M} (e^{nM|x-x_0|} - 1), \quad (k = 1, \dots, n) \dots \dots \dots (19).$$

Dabei muß der maximale Wert von  $\Theta$  unter den  $n$  Funktionen  $f_k$  gesucht werden.

### 3. Die graphische Integration von Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gegeben:  $\bullet P_k, P'_k, P''_k, P^{(3)}_k, \dots$   
Gesucht:  $\circ$  nach dem Sehn-Verfahren  
 $\blacksquare$  nach dem Tangenten-Verfahren

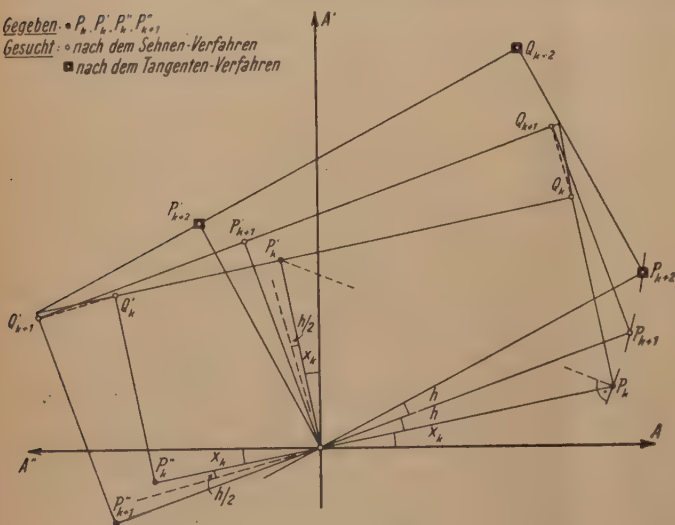


Bild 2. Sehn-Tangentenverfahren für DGl. 2. Ordnung

Die exakten Integrale lauten ganz entsprechend:

$$\left. \begin{aligned} y^{(n-1)}(x) - y_{n-1,0} &= \int_{x_0}^x F(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) dx \\ y^{(k)} - y_{k0} &= \int_{x_0}^x y^{(k+1)}(x) dx, \quad (k = 0, \dots, n-2). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23).$$

Die graphische Integration kann nun genau so erfolgen wie bei den DGl.-Systemen. Da aber jede Variable  $y^{(k)}$  die Ableitung der vorhergehenden  $y^{(k-1)}$  darstellt, vereinfacht sich die Konstruktion, indem man jede der  $y^{(k)}$ -Ebenen mit der vorhergehenden  $y^{(k-1)}$ -Ebene nach Drehung um  $90^\circ$  zusammenlegen kann, wie aus den Definitionen der Polaren Gl. I (9) unmittelbar abzulesen ist. Die Fehlerabschätzungen können unverändert von denen über Systeme von DGl. übernommen werden.

Die explizite DGl.  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (20)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} y^{(k)}(x_0) &= y_{k0}, \\ (k &= 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} (21)$$

soll, wie üblich, in ein System von  $n$  Variablen umgewandelt werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y', \\ \frac{dy'}{dx} &= y'', \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy^{(n-1)}}{dx} &= F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{aligned} \right\} (22).$$



Für die DGL. 2. Ordnung (Bild 2)

$$y'' = f(x, y, y')$$

mit den Anfangsbedingungen  $y(x_0) = y_0$  und  $y'(x_0) = y'_0$  soll das vorteilhafteste Sehnentangenten-Verfahren noch einmal für die einzelnen Schritte skizziert werden.

Das äquivalente DGL.-System lautet:

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = f(x, y, y').$$

Die Integration soll sich über das Bereich  $a \leq x \leq b$  erstrecken. Aus den Größen  $1, \frac{\partial f}{\partial y}$  und  $\frac{\partial f}{\partial y'}$  innerhalb des betrachteten Bereiches hat man die Lipschitz-Konstante zu bestimmen. Unter Beachtung der Konvergenzbedingung für die Iteration

$$Mh < 3/2$$

wählt man die Schrittweite  $h$ .

Wie bei den DGLn. 1. Ordnung (Zusammenstellung II, Abschn. 6) erfolgt die Konstruktion in den folgenden Schritten:

1. Schritt: Bei halber Schrittweite: Konstruktion von  $P_{1/2}^{(0)}$  und  $P_{1/2}'^{(0)}$  auf den Tangenten der Polaren in  $P_0$  und  $P_0'$ .  
Berechnung von  $y_{1/2}''^{(0)}$  aus der DGL.
2. Schritt:  $P_0' P_{1/2}^{(0)}$  und  $P_0'' P_{1/2}'^{(0)}$  nach dem Sehnentangentenverfahren integriert:  $P_{1/2}'^{(1)}$  und  $P_{1/2}^{(1)}$ .  
Berechnung von  $y_{1/2}''^{(1)}$  aus der DGL.  
Wiederholung des 2. Schrittes bis die Iterationen innerhalb der Zeichengenauigkeit konvergieren.
3. Schritt: Bei ganzer Schrittweite: Konstruktion von  $P_1^{(0)}$  und  $P_1'^{(0)}$  nach dem Tangentenverfahren.  
Berechnung von  $y_1''^{(0)}$  aus der DGL.
4. Schritt:  $P_0' P_{1/2}'^{(0)}$  und  $P_0'' P_{1/2}''^{(0)}$  nach dem Sehnentangentenverfahren integriert.  
Durch Mittelwertbildung  $P_1^{(1)}$  und  $P_1'^{(1)}$  bestimmt.  
Berechnung von  $y_1''^{(1)}$  aus der DGL.  
Wiederholung des 4. Schrittes (Iterationsverfahren).
5. Schritt: Wie 3. Schritt für das folgende Intervall  $x_1$  bis  $x_3$  ergibt  $P_2^{(0)}$  und  $P_2'^{(0)}$ .
6. Schritt: Wie 4. Schritt:  $P_2^{(1)}, P_2^{(2)}, \dots, P_2$  und  $P_2'^{(1)}, P_2'^{(2)}, \dots, P_2'$  usw.

#### 4. Beispiele.

##### 4.1. Die Differentialgleichung 2. Ordnung für die Kettenlinie (Bild 3)

Das physikalische Problem, die Gestalt eines der Schwerkraft unterworfenen Seiles zu finden, führt auf die DGL.

$$y'' = k \sqrt{1 + y'^2}$$

Als Beispiel soll das folgende Anfangswertproblem durchgeführt werden:

$$y'' = \sqrt{1 + y'^2},$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

$$0 \leq x \leq 1,5.$$

für den Bereich

Die Originalzeichnung wurde mit  $h = 0,1$ ,  $e = 150$  mm durchgeführt und ergab folgende Werte:

$n$	$x$	$y$	$y'$	$y''$	$n$	$x$	$y$	$y'$	$y''$
0	0	1,000	-1,000	1,4142	8	0,8	0,589	-0,089	1,0040
	0,05	—	-0,936	1,3697	9	0,9	0,581	-0,011	1,0001
1	0,1	0,908	-0,864	1,3216	10	1,0	0,586	0,113	1,0064
2	0,2	0,833	-0,739	1,2434	11	1,1	0,605	0,216	1,0231
3	0,3	0,759	-0,626	1,1798	12	1,2	0,632	0,321	1,0502
4	0,4	0,707	-0,511	1,1230	13	1,3	0,669	0,424	1,0862
5	0,5	0,656	-0,399	1,0767	14	1,4	0,722	0,532	1,1327
6	0,6	0,625	-0,293	1,0420	15	1,5	0,780	0,643	1,1889
7	0,7	0,599	-0,193	1,0184					



Die Berechnung der Funktionswerte wurde mit einer Quadrattafel durchgeführt. Außer am Anfang braucht man innerhalb der Zeichengenauigkeit kaum mehr als eine Iteration durchzuführen. Sehr genau läßt sich aus der Zeichnung das Minimum der Funktion ablesen, da dort die zweite Polare  $C_2$  und das Linienbild  $L$  sich schneiden und außerdem  $L_1$  dort eine Spitze haben muß (I, Satz 5—7).

Zur Fehlerabschätzung: Wegen  $f_1 = y'$  und  $f_2 = \sqrt{1+y'^2}$  ergibt sich für das angegebene Bereich die Lipschitzkonstante  $M=1$ . Die Konvergenz der Iteration ist gesichert wegen  $Mh \leq 0,1 < 3/2$ . Aus der Differenzentabelle der  $f_1$  und  $f_2$  werden die maximalen Differentialquotienten näherungsweise bestimmt:

$$|f_1^{IV}|_{max} = 850, \quad |f_1''|_{max} = 11, \quad |f_1|_{max} = 1.$$

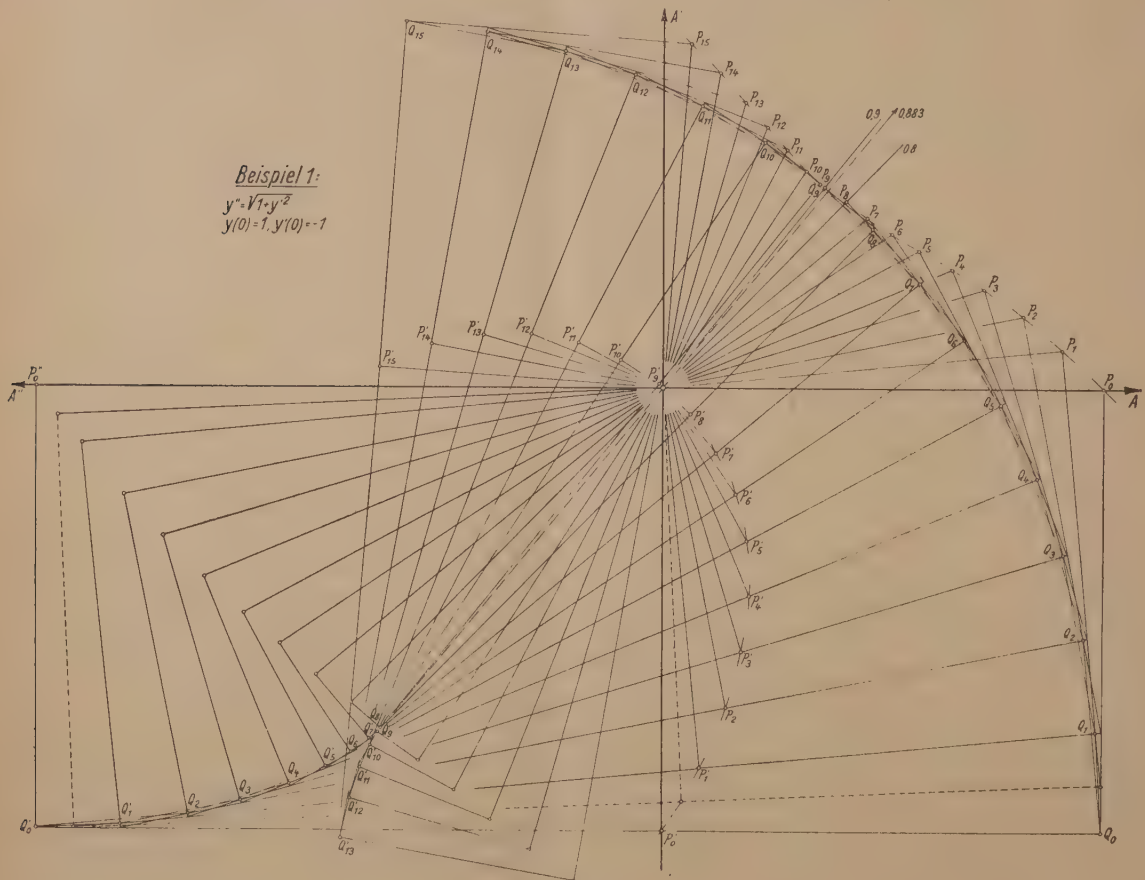


Bild 3

Mit dem Integrationsfehler

$$\Theta = \frac{h^4}{180} [f_1^{IV} + 10f_1'' + 9f_1]_{max} = 5,5 \cdot 10^{-4}$$

schätzt man den Fehler des letzten Funktionswertes ab:

$$|y_{15} - \bar{y}_{15}| \leq \frac{\Theta}{2M} (e^{2M|x-x_0|} - 1) = 5 \cdot 10^{-3},$$

also:

$$\bar{y}_{15} = 0,780 \pm 0,005.$$

Der hier leicht angebbare exakte Wert des Integrales lautet:

$$y = \sqrt{2} \cos x - \sin x + 1 - \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad y_{15} = 0,7833,$$

der Näherungswert mit den Fehlerschranken schließt also den exakten Wert ein.

Führt man zum Vergleich dasselbe Beispiel durch unter Anwendung der Simsonschen Regel in der Form, wie sie in II, Abschn. 8 angegeben wurde, so erhält man, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll:

$$\bar{y}_{15} = 0,7834 \pm 0,0001.$$



## 4.2. Die ungedämpfte, anharmonische Pendelschwingung (Bild 4)

Während für kleine Amplituden die harmonische Schwingung der DGL:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0 \quad \dots \dots \dots (a)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi'(0) = 0$$

genügt, wird für größere Amplituden die Schwingung anharmonisch und genügt der DGL:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0 \quad \dots \dots \dots (b).$$

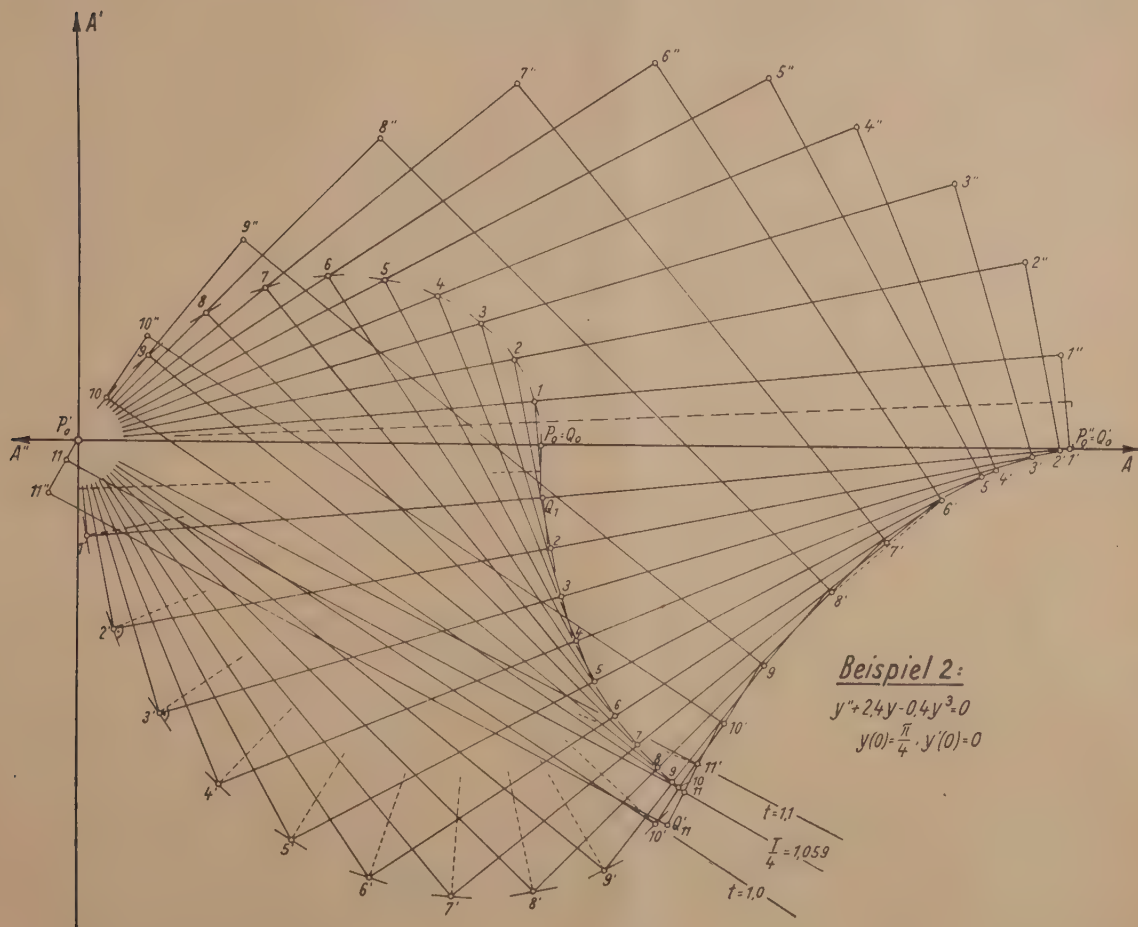


Bild 4

Uns interessiert in diesem Falle die Schwingungsdauer und man erhält aus den Lösungen der DGLn. für eine Viertel-Schwingung:

im Fall (a):  $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2k}$  und

im Fall (b):  $\frac{T}{4} = \frac{1}{k} F\left(\sin \frac{\varphi_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad [2]$

wobei unter  $F(\alpha, \varphi)$  das elliptische Normalintegral 1. Gattung zu verstehen ist.

Die DGL. a) ergibt sich aus b), wenn man von der Taylorsche Reihe für  $\sin \varphi$  nur das erste Glied berücksichtigt. Als Beispiel soll nun der Fall behandelt werden, bei dem man von der Reihenentwicklung die ersten beiden Glieder nimmt, also

$$\ddot{\varphi} + k^2 \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (c).$$

Für  $k^2 = 2,4$  ergibt sich demnach:

$$\ddot{\varphi} + 2,4 \varphi - 0,4 \varphi^3 = 0 \quad \dots \dots \dots (c^*)$$



mit den Anfangsbedingungen:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi'_0 = 0.$$

Ohne auf die Einzelheiten der Konstruktion nochmals einzugehen, erhält man für den gesuchten Zeitpunkt des ersten Durchganges durch die Nullage, also für die Zeit einer Viertelschwingung

$$\frac{T}{4} = 1,059.$$

Diesem Wert stehen gegenüber die Werte aus den DGl. (a) mit  $T/4 = 1,014$  und (b) mit  $T/4 = 1,055$  [3]. Die Vergrößerung der Schwingungsdauer ist also deutlich bemerkbar. Auch hier wird die Ablesung der Nullstelle dadurch erleichtert, daß das Linienbild eine Spitze hat (I, Satz 5—7).

### Zusammenfassung

Die letzten Beispiele haben gezeigt, daß die dargestellten graphischen Methoden geeignet sind, um mit ihnen ohne großen Zeichen- und Rechenaufwand schnell eine Lösung einer DGl. beliebiger Ordnung mit guter Näherung zu konstruieren. In der dargestellten Weise ist es auch möglich unter Verwendung der Meißnerschen Linienbilder sich einen Überblick über die Größenordnung des gemachten Fehlers bei sorgfältiger Zeichnung zu verschaffen. Ein daraus entwickeltes numerisches Verfahren liefert brauchbare Ergebnisse bei geringem Umfang der Rechnungen.

### Schrifttum

- [1] Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis. § 18,7. S. 166. Berlin-Leipzig 1928.  
Sind die  $n$  Gln.  $x_k = \varphi_k(x, \dots, x_n)$  durch Iteration zu lösen, so ist die Konvergenzbedingung:  
 $nM < 1$ , wenn  $\left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} \right| < M$ .
- [2] A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik. Bd. IV. 10. Aufl. § 13, S. 86—89. München 1944.
- [3] Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen. 4. Aufl. S. 53 und 62—67. Leipzig 1948.

Eingegangen 19. 6. 50.

## Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen

Von H. Reichardt in Göttingen

(Aus dem Max Planck-Institut für Strömungsforschung)

*Auf Grund experimenteller Untersuchungen des turbulenten Austausches wurde eine Formel für die Geschwindigkeit turbulenter Strömungen in Rohren und Kanälen entwickelt. Diese Formel stellt die Geschwindigkeit über einem Halbmesser vollständig dar, d. h. sie gilt näherungsweise sowohl für die unmittelbare Wandnähe als auch für den mittleren Teil des Strömungsquerschnittes.*

*From experimental investigations of turbulent exchange of momentum a formula is derived for the velocity of turbulent flow in tubes and pipes. This formula gives a complete representation of the velocity distribution, i. e. it holds good close to the wall as well as in the core of the flow.*

*En vertu d'une examination expérimentale d'échange turbulent d'impulsion une formule fut développée pour la vitesse d'écoulements turbulents dans de tuyaux et de canaux. Cette formule donne une représentation complète de la distribution de la vitesse, c'est-à-dire, elle est valable non seulement dans la voisinage immédiate de la paroi, mais encore dans la partie centrale de l'écoulement.*

На основании экспериментального исследования вихревого обмена выводится формула для скорости вихревого потока в трубах и каналах. Эта формула дает полное распределение скорости, т. е. она действительна и вблизи стенок и в средней части потока.

### 1. Problemstellung

Die bisherigen Untersuchungen der turbulenten Strömungen in Rohren, Kanälen und in der Reibungsschicht an der ebenen Platte haben ergeben, daß die Geschwindigkeit annähernd mit dem Logarithmus des Wandabstandes ansteigt. Die Auswertung dieser Versuche mit Hilfe allgemeiner Dimensionsbetrachtungen lieferte das turbulente Wandgesetz, das folgendermaßen lautet:

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + c \quad \dots \quad (1).$$

Hier bedeuten  $u$  die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Abstände  $y$  von der Wand,  $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho}$  die „Schubspannungsgeschwindigkeit“,  $\tau_0$  die Wandschubspannung,  $\rho$  die Dichte des Mediums,



$\eta = \gamma u^* / \nu$  der in Form einer Reynoldsschen Zahl geschriebene dimensionslose Wandabstand und  $\nu = \mu / \rho$  die kinematische Zähigkeit.  $\kappa$  und  $c$  sind Konstanten.

Die Ableitung des Wandgesetzes hat zur Voraussetzung, daß die turbulente Scheinreibung der Schubspannung  $\tau_0$  in der Nähe der Wand überall praktisch gleichgroß ist. Gl. (1) gilt also eigentlich nur für eine dünne Schicht in großer Wandnähe. Diese Schicht darf aber andererseits auch nicht zu dünn sein, da die Turbulenz in unmittelbarer Wandnähe schon aus Kontinuitätsgründen erlischt und die Strömung dort laminar dahingleitet. Die bisherige Theorie ist also von beiden Seiten auf einen schmalen Existenzbereich beschränkt.

Bekanntlich gilt das Wandgesetz auch noch in größerer Entfernung von der Wand, wo die turbulente Scheinreibung  $\tau_t$  von der Wand-Schubspannung  $\tau_0$  wesentlich abweicht. Dies ist ohne Zweifel von praktischem Vorteil. Vom theoretischen Standpunkt aus betrachtet ist jedoch die Gültigkeit einer Formel außerhalb des Gültigkeitsbereiches ihrer grundlegenden Voraussetzungen solange unbefriedigend, als für diese Tatsache noch keine einwandfreie physikalische Erklärung gegeben worden ist.

Erst im Innern des Strömungsquerschnittes treten merkliche Abweichungen vom Wandgesetz auf und zwar sind die tatsächlichen Geschwindigkeiten größer als die nach Gl. (1) berechneten Geschwindigkeiten. Wenn diese „Zusatzgeschwindigkeit im Innern“ (die wir mit  $u_i$  bezeichnen wollen) auch gering sind, so ist doch die Tatsache von grundsätzlicher Bedeutung, daß hier die dimensionslose Geschwindigkeit nicht allein von  $\eta$ , sondern auch vom Wandabstand unmittelbar abhängt. Eine einwandfreie Darstellung dieser besonderen Verhältnisse im Innern der Reibungsschicht steht bislang noch aus.

Der Verfasser hat sich daher die Aufgabe gestellt, die aufgezeigten Lücken der Theorie auszufüllen. Zunächst soll das Wandgesetz durch die Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung bis in die laminare Wandschicht hinein vervollständigt werden. Dann wollen wir die im Innern der Reibungsschicht bestehende Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit vom Wand- bzw. Mittenabstand klären und formelmäßig beschreiben.

Wir beschränken unsere Betrachtungen auf den Typ der ausgebildeten Strömung mit Druckabfall, wie er in Rohren oder Kanälen beobachtet wird.

## 2. Grundsätzliche Betrachtungen

Wenn hier von einer vollständigen Darstellung des turbulenten Geschwindigkeitsprofils die Rede ist, so ist damit nicht eine vollständige Lösung des Problems der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung gemeint. Exakte Lösungen kann es in der Turbulenzforschung erst dann geben, wenn das Turbulenzproblem als solches gelöst ist, wenn also (wie beispielsweise bei den zähen Strömungen) die physikalischen Probleme auf rein mathematische Aufgaben zurückführbar sind. Von dieser höchsten Entwicklungsstufe ist aber die Turbulenzforschung noch sehr weit entfernt. Man kann sich höchstens mit Arbeitshypothesen behelfen, über deren Brauchbarkeit das Experiment entscheiden muß.

Von den bisherigen Bemühungen zur theoretischen Unterbauung der Turbulenzforschung sind vor allem die Mischungsweghypothese Prandtls und die Ähnlichkeitshypothese v. Karman's zu nennen. Was die Rohrströmungen anbetrifft, so führten beide Hypothesen genähert zur logarithmischen Geschwindigkeitsverteilung. Wir müssen uns aber darüber im klaren sein, daß dieses Wandgesetz keineswegs eine zwingende Konsequenz der diffizilen Überlegungen über das Verhalten der Wirbelballen oder über die Ähnlichkeit der Wirbelbewegungen darstellt. Für die rechnerischen Ergebnisse war allein die Annahme wesentlich, daß der durch den Ausdruck

$\int \frac{\tau_t}{\rho} \frac{d\bar{u}}{dy}$  definierte Mischungsweg 1 mit dem Wandabstand linear ansteigt. Diese Annahme erschien „plausibel“, sie war jedoch keine logische Folge jener Hypothese. Der wissenschaftliche Fortschritt lag also nicht in den Hypothesen selbst, sondern in einer plausiblen Annahme über einen Hilfsbegriff, die durch Versuche bestätigt werden konnte.

Für die Weiterbildung der Theorie erschien es uns daher zweckmäßig, irgendwelche spekulativen Betrachtungen zu vermeiden und die für die Ableitungen benötigte grundlegende Voraussetzung unmittelbar auf die Erfahrung zu stützen. Durch die formelmäßige Wiedergabe der zugrundegelegten Meßergebnisse, die ja nicht ohne Phantasie zu bewerkstelligen ist, kommt naturgemäß eine gewisse Ungenauigkeit in die rechnerische Darstellung. Auf jeden Fall ist aber ein solcher ungenau wiedergegebener Tatbestand ein besseres Fundament für die Theorie als eine rein hypothetische Voraussetzung.

Für die vorliegenden Untersuchungen wollen wir als wesentlichen Hilfsbegriff die Austauschgröße  $A$  verwenden, die durch die Gleichung

$$\tau_t = A \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \dots \quad (2)$$



definiert ist ( $\tau_t$  = turbulente Schubspannung)<sup>1)</sup>. Die turbulente Austauschgröße ist das formale Analogon zum molekularen Zähigkeitskoeffizienten, dessen Definitionsgleichung  $\tau_m = \mu \frac{d\bar{u}}{dy}$  lautet. Die Größe  $A$  hat aber nicht nur eine formale, sondern auch eine wesentlich physikalische Bedeutung. Denn die Frage nach dem Verhältnis der turbulenten Schubspannung  $\tau_t$  zur zähen Schubspannung  $\tau_m$  (also nach dem Verhältnis  $A/\mu$ ) hat einen unmittelbar physikalischen Sinn. Sie spielt daher bei fast allen Turbulenzuntersuchungen, insbesondere auch bei den vorliegenden Betrachtungen, eine wesentliche Rolle.

Wir beginnen nun mit unseren Untersuchungen und stellen an die Spitze unserer Rechnung folgende identische Beziehung:

$$\frac{d\left(\frac{u}{u^*}\right)}{d\eta} = \frac{\frac{du}{dy}}{\left(\frac{du}{dy}\right)_0} = \frac{\tau_m}{\tau_0} \dots \dots \dots (3)$$

(der Index 0 kennzeichnet die an der Wand auftretenden Werte des Geschwindigkeitsgradienten bzw. der zähen Schubspannung  $\tau_m$ )<sup>2)</sup>. Wie man sich durch Verifizieren von (3) leicht überzeugen kann, bedeutet der Differentialquotient der dimensionslosen Geschwindigkeit nach dem dimensionslosen Wandabstand nichts anderes als das Verhältnis des Geschwindigkeitsgradienten an der Stelle  $y$  zu dem entsprechenden Gradienten an der Wand.

Wir führen die Gesamtschubspannung  $\tau$  ein:

$$\tau = \tau_m + \tau_t = (\mu + A) \frac{du}{dy} \dots \dots \dots (4)$$

Unter Verwendung dieser Gleichung folgt aus (3)

$$\frac{d\left(\frac{u}{u^*}\right)}{d\eta} = \frac{\frac{\tau}{\tau_0}}{1 + \frac{A}{\mu}} \dots \dots \dots (5)$$

Aus (5) ist zu ersehen, daß die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung von den Größen  $\frac{\tau}{\tau_0}$  und  $\frac{\tau_t}{\tau_m} = \frac{A}{\mu}$  abhängt. Bei den ausgebildeten Strömungen mit Druckabfall, die wir im folgenden betrachten werden, ist  $\frac{\tau}{\tau_0}$  bekannt und zwar gleich  $1 - \frac{y}{r}$  (wenn  $y$  der Wandabstand und  $r$  der Halbmesser des Rohres oder Kanales bedeutet). Unsere Aufgabe reduziert sich also auf die Frage nach der Abhängigkeit der Austauschgröße vom Wandabstand und von der Reynoldsschen Zahl.

Wie wir bereits sagten, läßt sich die Austauschgröße ebenso wenig aus der praktisch noch unerforschten Turbulenzstruktur berechnen wie etwa der Mischungsweg oder irgendein anderer Hilfsbegriff. Wir haben daher die dimensionslose Austauschgröße  $A/\mu\eta_r$  durch Versuche bestimmt ( $\eta_r = \frac{ru^*}{\nu}$ ). Diese experimentell ermittelte Funktion (siehe Bild 5) wird in unsere weiteren Rechnungen eingehen.

### 3. Das Wandgesetz

In Wandnähe läßt sich die Austauschgröße verhältnismäßig leicht aus der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung bestimmen. Bereits Nikuradse<sup>3)</sup> hat eine solche Bestimmung von  $A$  durchgeführt. Seine Messungen ergaben, daß in Wandnähe

$$\frac{A}{\mu\eta_r} = \kappa \frac{y}{r} \dots \dots \dots (6)$$

ist (der Proportionalitätsfaktor  $\kappa$  ist etwa 0,4). In größerer Entfernung (etwa oberhalb von  $\frac{y}{r} = 0,1$ )

<sup>1)</sup> Die Anwendung des Mischungswegbegriffes wäre unzumutbar, da bei der Darstellung des Verhältnisses  $\tau_t/\tau_m$  (s. u.) der Geschwindigkeitsgradient nicht herausfallen würde. Ferner tritt auch bei den hier behandelten Strömungen die bekannte Schwierigkeit auf, daß der Mischungsweg in der Symmetrieachse (bzw. -ebene) zu einer Singularität führt. Im mittleren Bereich ist nämlich in Anbetracht der linearen Verläufe

der Schubspannung sowie des Geschwindigkeitsgradienten (s. Bild 4)  $l = \sqrt{\frac{\tau_t}{\rho}} \frac{d\bar{u}}{dy} \sim \frac{\sqrt{z}}{z} \sim \frac{1}{\sqrt{z}}$ , wenn  $z$  den Abstand von der Mitte bedeutet.  $l$  wird daher bei  $z \rightarrow 0$  unendlich.

<sup>2)</sup> Wir werden fortan den Mittelwertstrich über dem  $u$  fortlassen, wenn eine Verwechslung von  $u$  mit dem Augenblickswert  $u = \bar{u} + u'$  nicht zu befürchten ist.

<sup>3)</sup> J. Nikuradse, Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. VDI-Forschungsheft 356, 1932.



wächst  $A/\mu\eta$ , schwächer als linear mit  $y/r$ . Auch über diesen Verlauf geben die Untersuchungen Nikuradses Auskunft (allerdings sind seine Werte oberhalb von  $\frac{y}{r} \approx 0,8$  unsicher. [Näheres siehe im 4. Kapitel]).

Über den Gültigkeitsbereich von (6) in Richtung zu kleinen Wandabständen ist nichts Näheres bekannt. Fest steht nur, daß Gl. (6) in allernächster Wandnähe nicht mehr gelten kann, weil der turbulente Austausch dort aus Kontinuitätsgründen verschwindet und sich die Flüssigkeit parallel zur Wand laminar bewegt.

Da für das Erlöschen der Turbulenz an der Wand die Kontinuität verantwortlich ist, so läßt sich aus der Kontinuitätsgleichung eine Aussage über das Abklingen von  $A$  gewinnen. Die Kontinuitätsbedingung für die Geschwindigkeitsschwankungen  $u'$  (parallel zur Wand) und  $v'$  (senkrecht zur Wand) lautet:

$$\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{\partial u'}{\partial x} \quad \dots \quad (7).$$

Bezeichnen wir das Verhältnis  $u'/\bar{u}$  mit  $\alpha$ , so können wir für  $u'$  ansetzen:

$$u' = \alpha \bar{u} = \alpha \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 y \quad \dots \quad (8),$$

wobei  $\alpha$  eine Funktion der Zeit und der Ortskoordinate  $x$  darstellt. Setzen wir (8) in (7) ein, so folgt:

$$v' = -\frac{\partial \alpha}{\partial x} \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 \frac{y^2}{2} \quad \dots \quad (9).$$

Während wir also in erster Näherung einen linearen Anstieg von  $u'$  mit  $y$  (entsprechend dem linearen Anstieg von  $\bar{u}$  mit  $y$ ) anzunehmen haben, folgt aus der Kontinuitätsbedingung, daß  $v' \sim y^2$  ist. Daraus folgt weiter für die turbulente Scheinreibung

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = 0,25 \rho \frac{\partial \alpha^2}{\partial x} \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0^2 y^3 \quad \dots \quad (10).$$

Für den Verlauf der Austauschgröße in unmittelbarer Wandnähe erhalten wir dann:

$$\frac{A}{\mu} = 0,25 \frac{\partial \alpha^2}{\partial \left( \frac{x}{r} \right)} \left( \frac{y u^*}{r} \right)^3 \quad \dots \quad (11).$$

Die Austauschgröße ist also proportional  $\eta^3$  (über die Größe des Proportionalitätsfaktors können wir hier allerdings nichts aussagen). Das bedeutet ein außerordentlich schwaches Ansteigen von  $A$  bei den kleinen  $\eta$ -Werten. Sowohl die erste als auch die zweite Ableitung von  $A$  nach  $\eta$  verschwindet an der Wand. Erst die dritte Ableitung hat einen endlichen Wert \*).

Für die formelmäßige Darstellung von  $A/\mu$  als Funktion von  $y$  bzw.  $\eta$  benötigen wir daher eine Funktion, deren erste und zweite Ableitung an der Wand Null ist. Andererseits muß diese Funktion in einiger Entfernung von der Wand in den linearen Verlauf  $\propto \eta$  asymptotisch überleiten.

\*) Anmerkung bei der Korrektur.

An der vorstehenden Ableitung ist zu bemängeln, daß die dritte Schwankungskomponente  $w'$  vernachlässigt wurde. Bei dieser Vereinfachung ist, wie Gl. (11) zeigt,  $\frac{A}{\mu} \sim \eta^3$ , wenn  $\frac{\partial \alpha^2}{\partial x} \sim \frac{\partial u'^2}{\partial x} \neq 0$  ist. Diese Bedingung ist aber nur in nichtausgebildeten Strömungen erfüllt.

Wird die  $w'$ -Komponente berücksichtigt und ausgebildete Strömung angenommen, so erhält man statt (11):

$$\frac{A}{\mu} = \frac{1}{2 u^{*2}} \frac{\left( \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right)_0}{\partial \zeta} \frac{\left( \frac{\partial w'}{\partial \eta} \right)_0}{\partial \zeta} \eta^3 \quad \dots \quad (11a)$$

( $\zeta = zu^*/v$ ). Hier ist zu fragen, ob  $\left( \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right)_0$  und  $\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial w'}{\partial \eta} \right)_0$  korreliert sind oder nicht. Falls diese beiden Größen völlig unkorreliert sind, so würde daraus folgen, daß die Austauschgröße nicht mit  $\eta^3$  ansteigt, sondern mit einer noch höheren Potenz von  $\eta$ .

Wir kommen also zu folgendem Ergebnis: Wird der Verlauf der Austauschgröße in unmittelbarer Wandnähe durch eine Potenzreihe von  $\eta$  dargestellt, so entfallen die Glieder mit  $\eta$  und  $\eta^2$ . Das Glied dritten Grades existiert mit Sicherheit nur bei nichtausgebildeten Strömungen.

Die Kenntnis des Verlaufes der Austauschgröße in nächster Nähe der Wand ist für die Theorie der Wärmeübertragung von wesentlicher Bedeutung. In einer neueren Arbeit des Verfassers über den „Einfluß der wandnahen Strömung auf den turbulenten Wärmeübergang“ wurde die Proportionalität der Austauschgröße mit  $\eta^3$  angenommen (Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Nr. 3, 1950). Die dort für sehr kleine  $\eta$ -Abstände angegebenen kleinen  $A/\mu$ -Werte sind möglicherweise zu groß, da  $A/\mu$  möglicherweise mit einer höheren als der 3. Potenz von  $\eta$  ansteigt. Noch wesentlich höhere Beträge der Turbulenzreibung in Wandnähe setzt K. E l s e r in seiner Arbeit „Reibungstemperaturfelder in turbulenten Grenzschichten“ voraus (Mitt. Inst. Thermodynamik ETH Zürich, H. 8 (1949)).



Diesen beiden Anforderungen wird nun die Funktion

$$\frac{A}{\mu} = \kappa \left( \eta - \eta_1 \operatorname{Tang} \frac{\eta}{\eta_1} \right) \quad \dots \quad (12)$$

gerecht. Wir werden daher diese Gleichung als Ansatz für  $A/\mu$  benutzen.

Die in (12) auftretende Konstante  $\eta_1$  ist ein Maß für die „Stärke der laminaren Wand-schicht“.  $\eta_1$  ist so vorzugeben, daß die mit Hilfe von (12) berechneten Geschwindigkeiten der turbulenten Wandströmung mit den gemessenen Geschwindigkeiten übereinstimmen.

Der durch Formel (12) beschriebene Verlauf von  $A/\mu$  ist in Bild 1 dargestellt und zwar für  $\kappa = 0,4$  und  $\eta_1 = 11^4$ . Wie wir noch weiter unten darlegen werden, führt dieser Wert von  $\eta_1$  zu dem Werte 5,5 der Konstanten  $c$  des logarithmischen Wandgesetzes (1).

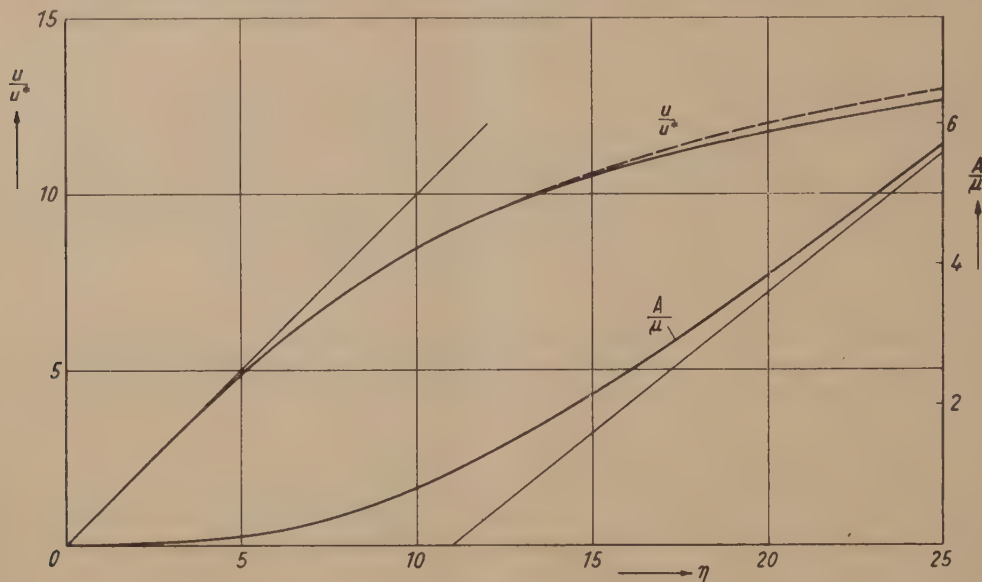


Bild 1

Bei Verwendung von (12) und unter Beachtung der Tatsache, daß in ausgebildeter Strömung  $\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r}\right)$  ist, folgt aus (5)

$$\frac{d\left(\frac{u}{u^*}\right)}{d\eta} = \frac{1 - \frac{y}{r}}{1 + \kappa(\eta - \eta_1 \operatorname{Tang} \eta/\eta_1)} \quad \dots \quad (13)$$

Die Quadratur dieser Gleichung ist leider nicht mit Hilfe der bekannten Rechenoperationen auszuführen. Wir müssen daher nach Aushilfen suchen.

Zunächst können wir im Zähler  $y/r$  gegenüber 1 vernachlässigen, da wir es ja in diesem Kapitel ausschließlich mit wandnahen Vorgängen zu tun haben. Ferner empfiehlt es sich, auf der rechten Seite von (13) ein Glied  $1/(1 + \kappa\eta)$  abzuspalten, weil dadurch wenigstens eine Teilintegration möglich wird. Nach Ausführung dieser Integration erhalten wir dann

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa\eta) + f(\eta) \quad \dots \quad (14)$$

Hier ist  $f(\eta)$  durch die Gleichung definiert:

$$f(\eta) = \int_0^\eta \frac{\kappa \eta_1 \operatorname{Tang} \eta/\eta_1 d\eta}{(1 + \kappa\eta - \kappa\eta_1 \operatorname{Tang} \eta/\eta_1)(1 + \kappa\eta)} \quad \dots \quad (15)$$

Auch die Quadratur von (15) ist nicht ausführbar. Wir können aber den Integranden  $f'(\eta)$  näherungsweise durch die Funktion

$$f'_1 = \frac{c_1}{\eta_1} (e^{-\eta/\eta_1} + (b\eta - 1)e^{-b\eta}) \quad \dots \quad (16)$$

<sup>4)</sup> Wie Bild 1 zeigt, ist  $A < \mu$  im Bereich  $\eta < \approx 11$  bzw.  $A > \mu$  im Gebiet  $\eta > \approx 11$ . Der dimensionslose Wandabstand  $\eta_1 \approx 11$  ist daher ein Maß für die Stärke derjenigen wandnahen Schicht, in der die molekulare Reibung die turbulente Reibung überwiegt.



ersetzen, wodurch die Integration möglich wird. Wir erhalten dann für  $f_1$ :

$$f_1 = c_1 \left( 1 - e^{-\eta/\eta_1} - \frac{\eta}{\eta_1} e^{-b\eta} \right) \dots \dots \dots (17).$$

Hier sind die Konstanten  $c_1$  und  $b$  aus den Grenzbedingungen zu ermitteln.

Ersetzen wir in Gl. (14)  $f$  durch die in (17) dargestellte Näherungslösung  $f_1$ , so erhalten wir für hohe  $\eta$  (bei denen 1 gegenüber  $\kappa\eta$  zu vernachlässigen ist)

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + \frac{1}{\kappa} \ln \kappa + c_1 \dots \dots \dots (14a).$$

Vergleichen wir diese Formel mit der für hohe  $\eta$  geltenden Gl. (1) so folgt, daß

$$\frac{1}{\kappa} \ln \kappa + c_1 = c$$

gesetzt werden muß. Unter Verwendung der üblichen Zahlenwerte  $\kappa = 0,4$  und  $c = 5,5$  erhalten wir dann  $c_1 = 5,5 + 2,3 = 7,8$ .

Der Wert der Konstanten  $\eta_1$  ergibt sich aus der Bedingung, daß das Integral der Gl. (15) bei Verwendung von  $\kappa = 0,4$  für hohe  $\eta$  den Wert 7,8 erreicht. Wir haben Gl. (15) für verschiedene  $\eta_1$ -Werte graphisch integriert und festgestellt, daß der geforderte Grenzwert 7,8 erhalten wird, wenn man  $\eta_1 = 11$  setzt.

Die Konstante  $b$  war aus den Grenzbedingungen der Wandschubspannung zu ermitteln. Diese werden nicht wesentlich verletzt, wenn man  $b = 0,33$  setzt.

Führen wir nun die vorstehenden Ergebnisse in Gl. (14) ein, so erhalten wir als Näherungsformel für das Wandgesetz:

$$\frac{u}{u^*} = 2,5 \ln (1 + 0,4 \eta) + 7,8 \left( 1 - e^{-\eta/11} - \frac{\eta}{11} e^{-0,33 \eta} \right) \dots \dots \dots (18).$$

Der Verlauf von  $u/u^*$  ist für kleinere  $\eta$ -Werte in Bild 1 und für etwas größere  $\eta$  in Abb. 3 dargestellt (und zwar hier als Funktion von  $\log \eta$ ). Die ausgezogenen Kurven zeigen das Ergebnis der graphischen Integration,

während die gestrichelten Kurvenzüge den  $u/u^*$ -Verlauf nach der Näherungsformel (18) wiedergeben. Wie man sieht, bestehen zwischen den durch graphische Integration und den durch Näherungsrechnung ermittelten dimensionslosen Geschwindigkeiten an keiner Stelle wesentliche Unterschiede. Etwas größere Differenzen bestehen stellenweise zwischen  $f'$  (ausgezogen) und  $f'_1$  (gestrichelt), wie man aus Bild 2 erkennt. Diese Abweichung ist aber insofern bedeutungslos, als man ja für irgendwelche Rechnungen, in die die Ableitung von  $f$  eingeht, nicht auf die Näherungsformel (16) angewiesen ist, sondern den Integranden von Gl. (15) unmittelbar verwenden kann.

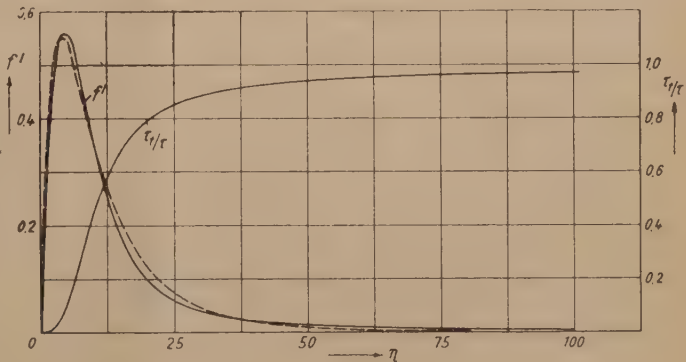


Bild 2

Unsere Gl. (18) hat gegenüber der bisherigen Formel (1) den Vorteil, daß sie die turbulente Scheinreibung für jeden  $\eta$ -Wert des wandnahen Bereiches beschreibt. Während das  $u/u^*$  der Gl. (1) mit abnehmendem  $\eta$  nach  $-\infty$  geht, ist unsere Formel auch bei  $\eta = 0$  richtig, indem sie hier die Haftbedingung  $u = 0$  erfüllt.

Für sehr kleine endliche Werte von  $\eta$  folgt aus (18)

$$\frac{u}{u^*} = \eta.$$

Dies ist der lineare Geschwindigkeitsanstieg in der laminaren Wandschicht, wie wir ihn auch unmittelbar aus Gl. (5) erhalten, wenn wir dort  $A = 0$  setzen. Dieser lineare Anstieg reicht bis  $\eta \approx 4$  (s. Bild 1). Von dieser Stelle ab wächst die dimensionslose Geschwindigkeit schwächer als linear mit  $\eta$ . Sie entfernt sich mit steigendem  $\eta$  immer weiter von der Geraden  $\eta$ , um dann allmählich in den logarithmischen Verlauf überzugehen (etwa bei  $\eta = 100$ ).

Das Zurückbleiben der Geschwindigkeit gegenüber dem geradlinigen Verlauf  $\eta$  hat seinen Grund in dem Auftreten der Turbulenz. Den Einfluß der turbulenten Reibung erkennt man



außer an  $A/\mu$  (Bild 1) auch an dem Verhältnis

$$\frac{\tau_t}{\tau} = \frac{\frac{A}{\mu}}{1 + \frac{A}{\mu}} \dots \dots \dots (19)$$

das unter Verwendung von Gl. (12) in Bild 2 dargestellt ist. Wie man aus beiden Abbildungen erkennt, ist eine nennenswerte turbulente Reibung erst ab  $\eta = 4$  feststellbar, wo also das Zurückbleiben der dimensionslosen Geschwindigkeit gegenüber dem geradlinigen Verlauf  $\eta$  beginnt. Dort, wo der Übergang in die logarithmische Geschwindigkeitsverteilung erfolgt (also etwa bei  $\eta = 100$ ), beträgt der Anteil der turbulenten Reibung an der gesamten Schubspannung über 98%.

Die vorstehenden Betrachtungen haben selbstverständlich nur näherungsweise Gültigkeit, da wir die genaue Gesetzmäßigkeit des Abklingens der turbulenten Scheinreibung in Wandnähe

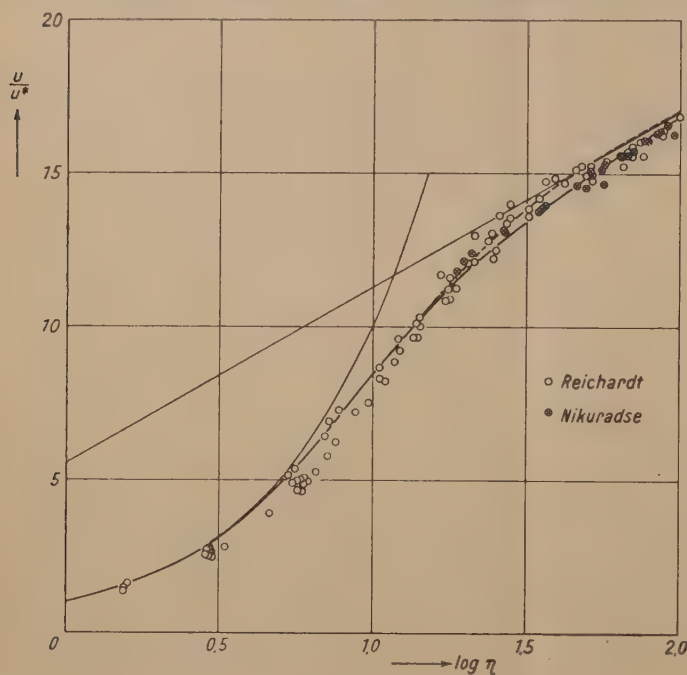


Bild 3

nicht kennen. Der durch unsere Formel (18) dargestellte Geschwindigkeitsverlauf dürfte jedoch von der Wirklichkeit nicht wesentlich abweichen, da die Grenzbedingungen für die Austauschgröße sowie für die Geschwindigkeit sowohl an der Wand als auch in größerer Entfernung von der Wand richtig erfüllt wurden.

Die experimentelle Prüfung des Wandgesetzes für kleine  $\eta$  ist kein einfaches Problem, da die Geschwindigkeitssonden (Stauröhrchen, Hitzdrähte) in großer Wandnähe und bei sehr kleinen Geschwindigkeiten Fehlanzeigen geben, deren hinreichend genaue Ermittlung große Schwierigkeiten bereitet. Solche bei kleinen  $\eta$ -Werten durchgeführten Geschwindigkeitsmessungen, die der Verfasser im Rahmen einer früheren Arbeit<sup>5)</sup> durchgeführt hat, sind in Bild 3 dargestellt. Wie man sieht, liegen die meisten Meßpunkte in der Nähe

der gerechneten Kurve. Etwas größere Abweichungen treten lediglich bei den in sehr geringen Wandabständen durchgeführten Hitzdrahtmessungen auf und zwar in dem Sinne, daß die gemessenen Geschwindigkeiten zu klein sind.

#### 4. Das Mittengesetz

Da im mittleren Teil eines Kanals oder Rohres alle Vorgänge symmetrisch zur Mittelebene bzw. Achse verlaufen, empfiehlt es sich, den Ursprung des Koordinatensystems in die Mittelebene bzw. in die Achse zu verlegen. Der Abstand von diesem Ursprung sei  $z$ .  $z$  verläuft von  $r$  bis  $-r$ . Links von der Mitte im Abstande  $z = r$  möge sich die Wand befinden, für deren Nähe wir soeben die Geschwindigkeitsverteilung dargestellt haben. Es ist also  $z = r - y$  bzw.  $y = r - z$ .

Im mittleren Bereich kann die molekulare Zähigkeit gegenüber dem turbulenten Austausch vernachlässigt werden. Führen wir noch  $-dz/r$  statt  $dy/r$  in unsere Grundgleichung (5) ein, so erhalten wir

$$-\frac{d\left(\frac{u}{u^*}\right)}{d\left(\frac{z}{r}\right)} = \frac{\frac{\tau}{\tau_0}}{\frac{A}{\mu \eta_r}} \dots \dots \dots (20).$$

Über die dimensionslose Austauschgröße  $A/\mu \eta_r$  geben unsere Versuche Auskunft. Durch unmittelbare Messung des Differentialquotienten des Staudruckes mit Hilfe eines Doppelstau-

<sup>5)</sup> H. Reichardt, Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten. Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 297.



rohres konnten wir die Austauschgröße vor allem für den mittleren Bereich ziemlich genau bestimmen (s. die Bilder 4 und 5)<sup>6)</sup>. Diese Experimente lassen sich näherungsweise durch folgende Gleichung einheitlich darstellen:

$$\frac{A}{\mu \eta_r} = \frac{\kappa}{3} \left( 0,5 + \left( \frac{z}{r} \right)^2 \right) \left( 1 - \left( \frac{z}{r} \right)^2 \right) \dots \dots \dots (21).$$

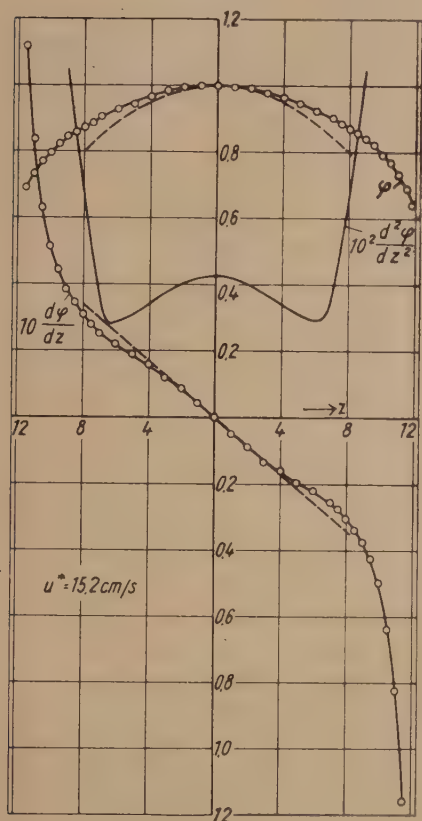


Bild 4

Führen wir diese Beziehung in (20) ein und beachten, daß in ausgebildeter Strömung  $\frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \frac{y}{r} = \frac{z}{r}$  ist, so folgt hieraus

$$-\frac{2}{3} \kappa \frac{u}{u^*} = \int \frac{d \left( \frac{z}{r} \right)^2}{\left( 0,5 + \left( \frac{z}{r} \right)^2 \right) \left( 1 - \left( \frac{z}{r} \right)^2 \right)} + \text{konst} \quad (22).$$

Die Integration ergibt

$$\frac{u}{u^*} = \ln \left( \frac{1 - \left( \frac{z}{r} \right)^2}{0,5 + \left( \frac{z}{r} \right)^2} \right) + \text{konst} \quad \dots \quad (23).$$

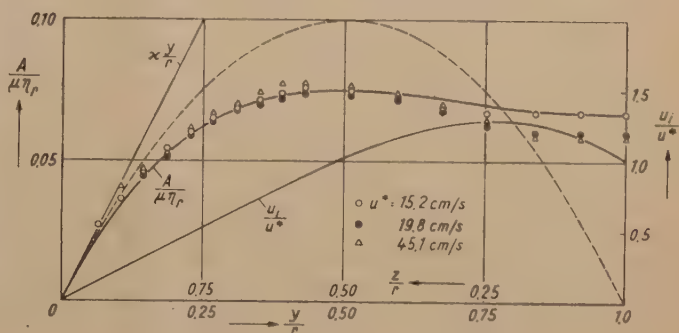


Bild 5

Die Konstante bestimmen wir für die Mittelebene bzw. Achse, wo  $\frac{z}{r} = 0$  und  $u = u_m$  ist:

$$\frac{u_m - u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{1 + 2 \left( \frac{z}{r} \right)^2}{1 - \left( \frac{z}{r} \right)^2} \right) \dots \dots \dots (24).$$

Diese Formel bezieht sich auf den gesamten Strömungsquerschnitt, ausgenommen die unmittelbar an den Wänden liegenden dünnen Schichten, in denen die molekulare Reibung eine wesentliche Rolle spielt. Da in Gl. (24) kein Wandabstand, sondern nur der Abstand  $z$  von der Mitte eingeht, die die Symmetrieebene bzw. Symmetrieachse des Geschwindigkeitsprofils darstellt, haben wir es hier mit einem echten „Mittengesetz“ zu tun.

Zur Prüfung der Formel (24) hat der Verfasser Geschwindigkeitsmessungen ausgeführt (s. Fußnote 6). Diese Messungen wurden in der durch Gl. (24) vorgeschriebenen Form aufgetragen. Wie Bild 6 zeigt (in dem statt des natürlichen Logarithmus der Zehnerlogarithmus erscheint) liegen die Meßpunkte auf bzw. in der Nähe einer Geraden mit der Neigung 5,75 (das entspricht einer Neigung von  $\frac{1}{\kappa} = 2,5$  bei Verwendung des natürlichen Logarithmus). An dem unten eingezeichneten Maßstab für  $\frac{z}{r}$  ist zu erkennen, daß das Mittengesetz (24) über  $\left| \frac{z}{r} \right| = 0,9$  hinaus, also bis in die unmittelbare Nähe der Wände gilt.

<sup>6)</sup> In Bild 4 bedeutet  $\varphi = \bar{u}/u_{max}$ . — Die Messungen sind im mittleren Vertikalschnitt eines rechteckigen Kanals durchgeführt worden, dessen Höhe 24,6 cm und dessen Breite 98 cm beträgt.

Für kleine  $z/r$  läßt sich der Logarithmus in (24) durch eine Reihe ersetzen und man kann schreiben

$$\varphi = 1 - \frac{3}{\kappa u_m / u^*} \left( \frac{z}{r} \right)^2 \dots \dots \dots (25).$$

Wir erhalten also für den mittleren Teil eine parabolische Form des Geschwindigkeitsprofils.

In Bild 4, das die Geschwindigkeitsverteilung  $\varphi = \frac{u}{u_{max}}$  für  $u = 15,2 \text{ cm/s}$  zeigt, ist das Parabelprofil der Formel (25) gestrichelt eingezeichnet. Wie man sieht, besteht zwischen dieser Parabel und der Kuppe des gemessenen Geschwindigkeitsprofils eine innige Berührung.

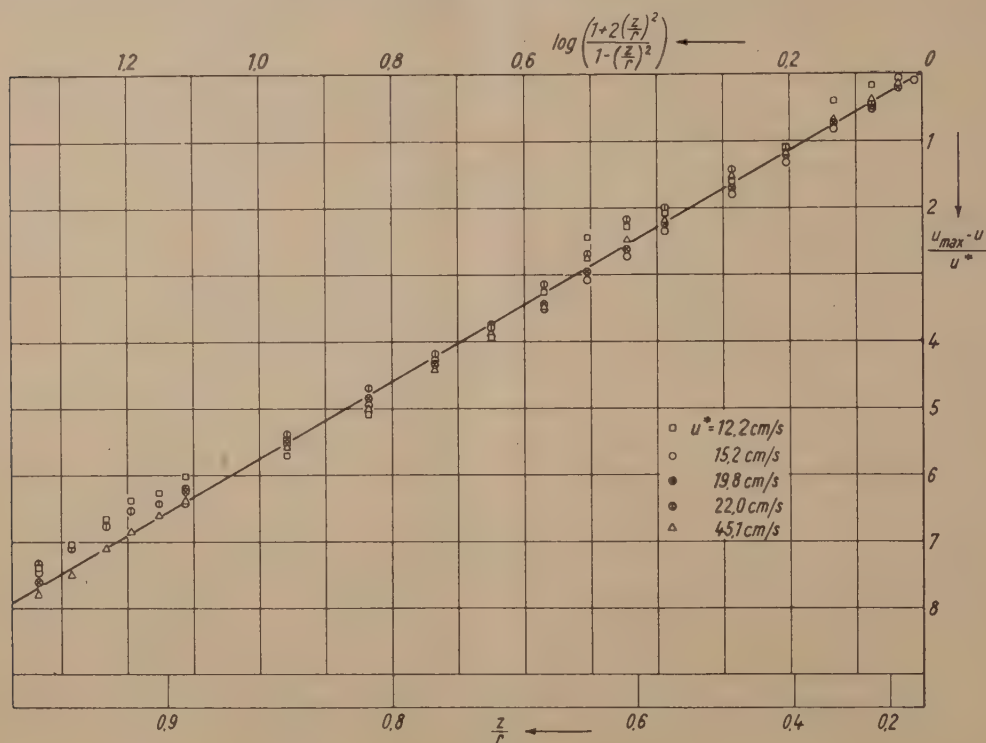


Bild 6

Die parabolische Gestalt der Profilkuppe hat ihren Grund darin, daß sich der turbulente Reibungskoeffizient im mittleren Teil des Strömungsquerschnittes kaum verändert (für kleine  $\frac{z}{r}$  folgt aus (21)  $\frac{A}{\mu \eta_r} \approx \frac{\kappa}{6}$ ). Diesen Sachverhalt erkennt man auch unmittelbar aus dem praktisch linearen Verlauf des Geschwindigkeitsgradienten im mittleren Strömungsquerschnitt. Denn da  $\tau = A \frac{d\bar{u}}{dz} = \tau_0 \frac{z}{r}$  ist, ist die Linearität von  $\frac{d\bar{u}}{dz}$  ein Kennzeichen für die Konstanz der Austauschgröße.

Es ist typisch für die turbulenten Profile, daß der Anstieg des Geschwindigkeitsgradienten mit wachsender Entfernung von der Mitte zunächst nachläßt, wie man aus Bild 4 ersieht. Im mittleren Bereich ( $\left| \frac{z}{r} \right| < 0,7$ ) liegen die Meßpunkte  $\left| \frac{d\varphi}{dz} \right|$  unterhalb des gestrichelt eingezeichneten linearen Verlaufes, den man in der Mitte beobachtet. Dieses Nachlassen der Profilkrümmung mit wachsendem  $z$ , das sich in einem Flacherwerden des Profils gegenüber der Parabel äußert, hat seinen Grund in dem Anstieg der Austauschgröße ( $A \sim \frac{z}{r} \frac{d\varphi}{dz}$ ) (s. Bild 5). Diese hat ihr Maximum bei  $\frac{z}{r} \approx 0,5$ , wie bereits Nikuradse (s. oben) festgestellt hat. Hier liegt daher auch das Minimum der Profilkrümmung  $\frac{d^2\varphi}{dz^2}$ .

Wir wollen nun die errechnete Geschwindigkeitsverteilung (24) als Funktion eines Wandabstandes darstellen und führen zu diesem Zweck den Abstand  $y$  von der linken Wand in (24)



ein. Wegen  $y = r - z$  erhalten wir dann:

$$\frac{u - u_m}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{y}{r} + \ln \frac{1 + \frac{z}{r}}{1 + 2 \left( \frac{z}{r} \right)^2} \right) \dots \dots \dots (26).$$

Wenn wir hier das zweite Glied der rechten Seite fortlassen, so erhalten wir das Mittengesetz in seiner bisherigen Form.

Für die weitere Umformung von (26) definieren wir eine dimensionslose Zusatzgeschwindigkeit  $\frac{u_i}{u^*}$  durch folgende Gleichung:

$$\frac{u_i}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{1,5 \left( 1 + \frac{z}{r} \right)}{1 + 2 \left( \frac{z}{r} \right)^2} \right) \dots \dots \dots (27).$$

Führen wir ferner  $\eta_r = \frac{r u^*}{\nu}$  in (26) ein und bezeichnen den Wert von  $u_i$  in der Mitte mit  $u_{im}$ , so folgt:

$$\frac{u}{u^*} - \frac{1}{\kappa} \ln \eta - \frac{u_i}{u^*} = \frac{u_m}{u^*} - \frac{1}{\kappa} \ln \eta_r - \frac{u_{im}}{u^*} \dots \dots \dots (28).$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen die Festwerte, die die einzelnen Glieder der linken Seite in der Mitte des Rohres oder Kanales erreichen. Da die rechte Seite von (28) konstant ist, können wir auch schreiben

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + \frac{u_i}{u^*} + c = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \eta \frac{1,5 \left( 1 + \frac{z}{r} \right)}{1 + 2 \left( \frac{z}{r} \right)^2} \right) + c \dots \dots \dots (29),$$

wobei  $c$  eine experimentell zu bestimmende Konstante bedeutet.

Durch die Einführung des dimensionslosen Wandabstandes  $\eta$  in unsere Mittenformel (24) sind wir also zu einer Gleichung gelangt, die sich von dem bisherigen Wandgesetz um das zusätzliche Glied  $u_i/u^*$  unterscheidet. Dieses Glied, das nur von der Ortskoordinate  $z/r$  bzw.  $y/r$  aber nicht von  $u^*$  bzw.  $\eta$  abhängt, gibt die Abweichung der Geschwindigkeitsverteilung im Innern vom logarithmischen Profil wieder. Setzt man  $\kappa = 0,4$  in Gl. (27) ein, so erhält  $u_i/u^*$  den in Bild 5 dargestellten Verlauf.

Wie Bild 5 zeigt, sind die Zusatzgeschwindigkeiten nur gering. Der bei  $y/r \approx 0,78$  liegende Maximalwert von  $u_i/u^*$  beträgt 1,28. Von dort fällt  $u_i/u^*$  schnell ab bis auf den Wert 1,01 in der Mitte. Dieser Verlauf gilt natürlich nur für den hier behandelten Fall der ausgebildeten Strömung mit Druckabfall. Würde man eine entsprechende Funktion für die Grenzschicht an der ebenen Platte berechnen, so würde man, nach den Messungen von Schultz-Grunow zu urteilen<sup>7)</sup>, auf etwa zweifach höhere Werte von  $u_i/u^*$  kommen. Diese höheren Zusatzgeschwindigkeiten haben offenbar ihren Grund in dem Abklingen des turbulenten Austausches beim Übergang der Grenzschichtströmung in die äußere Potentialbewegung.

Die eigenartige Form der Funktion  $u_i/u^*$  erklärt die bekannten leicht gekrümmten Kurvenabschnitte, die die Meßpunkte im Inneren des Strömungsquerschnittes bei der halblogarithmischen Auftragung beschreiben. Diese Abweichungen von der logarithmischen Geraden verschwinden, wenn man statt  $\frac{u}{u^*}$   $\frac{u - u_i}{u^*}$  als Funktion von  $\log \eta$  darstellt. Das geht aus Bild 7 hervor, in der die bereits in Abb. 6 wiedergegebenen Geschwindigkeitsmessungen in der geschilderten Weise aufgetragen sind. Im Unterschied zu den  $\frac{u}{u^*}$ -Meßpunkten sind die Punkte  $\frac{u - u_i}{u^*}$  ganz geradlinig ausgerichtet, woraus die Brauchbarkeit der Formel für  $u_i/u^*$  hervorgeht.

Wie Bild 7 zeigt, liegen die Punkte  $\frac{u - u_i}{u^*}$  etwas unterhalb der gestrichelt eingezeichneten Geraden, die die Neigung  $\frac{2,3}{\kappa} = 5,75$  hat und die Abszisse im Punkte  $c = 5,5$  schneidet. Auf eine genaue Ermittlung von  $c$  und  $\kappa$  aus den vorliegenden Messungen müssen wir aber ver-

<sup>7)</sup> F. Schultz-Grunow, Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten. Lufo 17 (1940), S. 239.

ziehen, da die aus dem Druckgefälle bestimmten  $u^*$ -Werte für diese Aufgabe zu ungenau sind<sup>8)</sup>. Wir können zunächst nur sagen, daß das Auftreten des Gliedes  $u_i/u^*$  grundsätzlich eine gewisse Änderung der Konstanten  $c$  und  $\kappa$  zur Folge hat. Voraussichtlich wird man den Wert  $\kappa = 0,4$  beibehalten können und nur den  $c$ -Wert zu verringern brauchen.

Auch in der neuen Auftragung ist, wie aus Bild 7 hervorgeht, noch eine gewisse Streuung der Meßpunkte vorhanden. Diese Schwankungen sind nur zum Teil durch Meßfehler bzw. durch

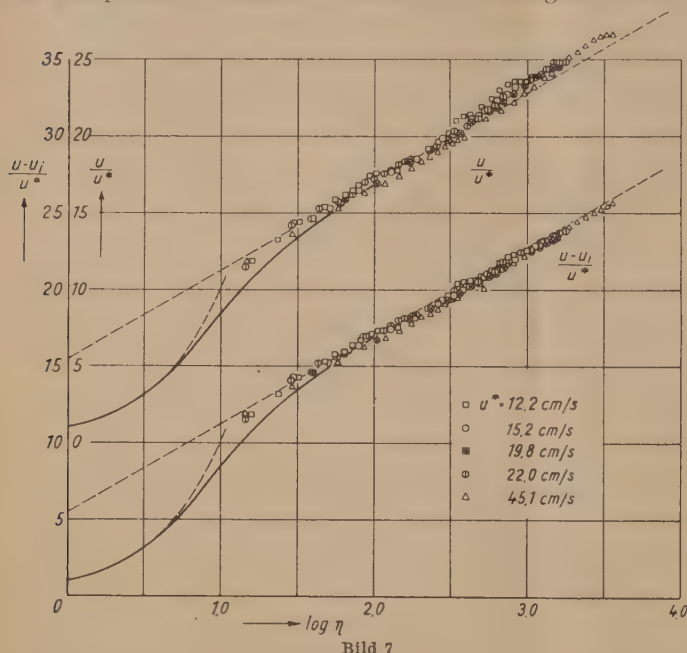


Bild 7

Ungenauigkeiten bei der Mittelwertsbildung bedingt. Wegen gewisser Mängel der Versuchseinrichtung (Störungen im Zustrom) waren die Geschwindigkeitsprofile zeitweise nicht völlig symmetrisch. Diese Störungen sind in die Messungen mit eingegangen. Es ist aber noch etwas Anderes zu bedenken.

Unsere in Bild 5 dargestellten Messungen von  $A/\mu\eta_r$  zeigen eine gewisse Abhängigkeit dieser Funktion von der Reynoldsschen Zahl bzw. von  $\eta_r$ . Wenn diese Beobachtung wirklich reell sein sollte, so wäre unsere einfache Gleichung (21) (deren rechte Seite von  $\eta_r$  unabhängig ist) für eine genaue Darstellung der turbulenten Profile grundsätzlich unzureichend. Diese prinzipiell außerordentlich wichtige Frage dürfte jedoch in diesem Zusammenhang

keine Rolle spielen, da selbst durch eine so erhebliche Veränderung der Theorie, wie sie unser Ansatz (21) zur Folge hatte, nur die Tatsache zur Darstellung gelangen konnte, daß die Abweichungen von der logarithmischen Geschwindigkeitsverteilung im mittleren Teil des Strömungsquerschnittes nur gering sind.

Wir haben nun noch die wichtige Frage zu beantworten, weshalb die logarithmische Form des Geschwindigkeitsprofils so dominiert, obwohl das logarithmische Gesetz voraussetzungsgemäß nur für die unmittelbare Nähe der Wand gelten sollte. Dieser merkwürdige Tatbestand hat seinen Grund darin, daß in der alten Theorie zwei Faktoren vernachlässigt worden sind, die, wenn man sie berücksichtigt, sich zum Teil gegenseitig aufheben. Der eine Faktor ist der Abfall der Schubspannung mit dem Wandabstand, der andere die Abweichung der Austauschgröße von dem angenommenen linearen Anstieg an der Wand.

Um das zu beweisen setzen wir in unserer Grundgleichung (5) (in der 1 gegenüber  $A/\mu$  zu vernachlässigen ist)  $\frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \frac{y}{r}$  (anstelle des früheren Wertes 1), sowie

$$\frac{A}{\mu\eta_r} = \kappa \frac{y}{r} \left(1 - \frac{y}{r}\right) \quad \dots \dots \dots (30)$$

anstelle des früher benutzten Ausdruckes  $\kappa \frac{y}{r}$ . Wir erhalten dann

$$\frac{d\left(\frac{u}{u^*}\right)}{d\left(\frac{y}{r}\right)} = \frac{1 - \frac{y}{r}}{\kappa \frac{y}{r} \left(1 - \frac{y}{r}\right)} \quad \dots \dots \dots (31).$$

Da hier  $\left(1 - \frac{y}{r}\right)$  gekürzt werden kann, besagt diese Gleichung, daß die logarithmische Geschwindigkeitsverteilung bis zur Mitte des Strömungsquerschnittes exakt gelten würde, wenn für die Austauschgröße die Funktion (30) Gültigkeit hätte. Jedenfalls können die Abweichungen der tatsächlichen Geschwindigkeitsverteilung vom logarithmischen Profil auf die Abweichungen der gemessenen Werte  $A/\mu\eta_r$  von der durch Formel (30) beschriebenen Funktion zurückgeführt werden.

<sup>8)</sup> Die Frage, ob und in welchem Ausmaß die Konstanten  $\kappa$  und  $c$  von der Form des Strömungsquerschnittes abhängen, kann nur durch weitere Versuche geklärt werden.



Um diese Unterschiede beurteilen zu können, haben wir den Funktionsverlauf von (30) ebenfalls in Bild 5 eingetragen (siehe die gestrichelt gezeichnete Parabel). Wie man sieht, gibt diese Parabel die Tendenz des Verlaufes der Austauschgröße wesentlich besser wieder als die ständig steigende Gerade  $\kappa y/r$ . Trotz teilweise erheblicher Abweichungen von den Meßpunkten stellt der parabolische Verlauf in Wandnähe sogar eine verhältnismäßig günstige Annäherung an die Wirklichkeit dar (etwa bis  $\frac{y}{r} = 0,15$  reichend). In diesem Wandabstand hat die Strömung aber bereits eine erhebliche Geschwindigkeit erreicht ( $u \approx 0,7 u_{max}$ ). Die Geschwindigkeitsentwicklung vollzieht sich also größtenteils in einem Gebiet, in dem die logarithmische Verteilung ziemlich genau gilt.

Die restliche Geschwindigkeitsentwicklung ( $0,7 < \frac{u}{u_m} < 1$ ) dehnt sich über ein weites Gebiet aus ( $0,15 < \frac{y}{r} < 1$ ). Im mittleren Strömungsquerschnitt ist also das Geschwindigkeitsprofil relativ flach. Je kleiner aber der Geschwindigkeitsgradient ist, desto geringer ist auch der Einfluß des Wertes der Austauschgröße auf den weiteren Geschwindigkeitsverlauf. Wir verstehen daher, daß die im Inneren auftretenden größeren Abweichungen der Meßwerte  $A/\mu\eta_r$  von dem durch Gl. (30) dargestellten Verlauf eine so geringe Wirkung haben.

Wie wir bereits gezeigt haben, erfolgen die Abweichungen von der logarithmischen Verteilung im Sinne zusätzlicher Geschwindigkeiten. Die tatsächlichen Geschwindigkeiten sind deswegen höher als die Geschwindigkeiten des logarithmischen Profils, weil der wirkliche turbulente Reibungskoeffizient über dem größten Teil des Strömungsquerschnittes geringer ist als der dem logarithmischen Gesetz zugrundeliegende Reibungskoeffizient der Gl. (30). Wie man aus Bild 5 ersieht, liegen die gemessenen Werte  $\frac{A}{\mu\eta_r}$  bis zu einem Wandabstand  $\frac{y}{r} = 0,78$  unterhalb der durch Gl. (30) dargestellten Parabel. Die Zusatzgeschwindigkeit  $u_i/u^*$  hat daher bei  $\frac{y}{r} = 0,78$  ihr Maximum. Sie nimmt dann bei noch größeren Wandabständen bis zur Mitte wieder ab, da der wirkliche Austauschkoefizient in diesem Gebiet größer ist als der durch Gl. 30) dargestellte Koeffizient des logarithmischen Profils.

### 5. Formel für den Gesamtquerschnitt

Im 3. Kapitel haben wir eine Formel abgeleitet (Gl. (18)), die die Geschwindigkeitsverteilung bis in die laminare Wandschicht hinein darstellt. Diese Geschwindigkeitsverteilung geht im Inneren in das logarithmische Profil über.

Im 4. Kapitel haben wir gezeigt, daß das logarithmische Profil im mittleren Teil des Strömungsquerschnittes nicht genau gilt und haben die dort auftretenden zusätzlichen Geschwindigkeiten  $u_i/u^*$  berechnet (Gl. (27)). Diese Zusatzgeschwindigkeiten sind so definiert, daß (statt  $u/u^*$ )  $\frac{u-u_i}{u^*}$  dem logarithmischen Gesetz gehorcht.

Wir können daher den Gültigkeitsbereich unserer Wandformel (18) auf den gesamten Strömungsquerschnitt ausdehnen, indem wir in Gl. (18)  $\frac{u}{u^*}$  durch  $\frac{u-u_i}{u^*}$  ersetzen. Wir erhalten dann, wenn wir die noch etwas unsicheren Zahlenwerte der Konstanten  $\kappa$ ,  $\eta_0$  und  $b$  sowie den von der Form des Strömungsquerschnittes beeinflussten Wert der Größe  $c_1 = c - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa$  wieder ausscheiden,

$$\frac{u-u_i}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa\eta) + c_1 \left( 1 - e^{-\eta/\eta_1} - \frac{\eta}{\eta_1} e^{-b\eta} \right) \dots \dots \dots (32).$$

Führen wir in (32) noch  $u_i/u^*$  aus (27) ein, so erhalten wir als endgültige Formel für die turbulente Geschwindigkeitsverteilung des Gesamtquerschnittes:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{1,5 \left( 1 + \frac{z}{r} \right)}{1 + 2 \left( \frac{z}{r} \right)^2} \right) + c_1 \left( 1 - e^{-\eta/\eta_1} - \frac{\eta}{\eta_1} e^{-b\eta} \right) \dots \dots \dots (33).$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, geht diese Gleichung für kleine Wandabstände ( $\frac{z}{r} \approx 1$ ) in das Wandgesetz (18) über. Andererseits folgt aus (33) für große  $\eta$  die Querschnittsformel (29).

Eingegangen am 28. August 1950.

# Spannungsfunktionen achsensymmetrischer Deformation in Zylinderkoordinaten

Von A. Timpe in Berlin

Anschließend an frühere Arbeiten wird das Problem der torsionsfreien, achsensymmetrischen Deformation von Umdrehungskörpern mittels einer einzigen Bipotentialfunktion behandelt. Die Methode wird auf Zylinderkoordinaten übertragen und auf verschiedene früher untersuchte typische Plattenprobleme zwecks Gewinnung eines einheitlichen Ausgangspunktes für allgemeinere Fälle angewendet.

The author has treated, in an earlier paper, the problem of the torsion-free, axially-symmetrical deformation of bodies of revolution, by aid of a single bi-potential function. The method is extended to cylindrical co-ordinates, and applied to several typical cases of plate deformation, examined in the earlier paper, to get a uniform startingpoint for the investigation of more general cases.

En continuant ses communications précédentes l'auteur traite le problème de la déformation sans torsion et symétrique par rapport à l'axe d'un corps de révolution à l'aide d'une seule fonction bi-potentielle. La méthode est étendue pour le cas de coordonnées cylindriques et appliquée aux plusieurs problèmes typiques, examinés plus tôt, de la déformation de plaques, dans l'intention de se procurer un point de départ pour de problèmes plus générales.

Продолжая свои прежние работы автор исследует проблему осесимметричной деформации тел вращения без кручения при помощи только одной бипотенциальной функции. Этот метод распространяется на цилиндрические координаты и применяется к уже раньше исследованным характерным случаям теории пластинок с целью получения исходной точки для более общих случаев.

Das Problem der torsionsfreien achsensymmetrischen Deformation von Umdrehungskörpern wurde vom Verf. in dieser Zeitschrift<sup>1)</sup> unter gleichzeitiger Verwendung zweier erzeugender Funktionen, einer Potentialfunktion  $\varphi$  und der dazu assoziierten Strömungsfunktion  $\psi$  in Zylinderkoordinaten behandelt. Andererseits wurde von ihm später<sup>2)</sup> der Lösungsschlüssel einer einzigen der Bipotentialgleichung genügenden erzeugenden Funktion  $F$  in Polarkoordinaten aufgezeigt, wobei sich die Möglichkeit der Inversion achsensymmetrischer Verzerrungszustände ergab. Für den letzteren Fall wurden bald danach<sup>3)</sup> von ihm die charakteristischen „Brückenlösungen“ des Bipotentialproblems diskutiert und insbesondere auf Kugelschalenprobleme angewendet. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Übertragung des Verfahrens einer einzigen erzeugenden Bipotentialfunktion  $F$  auf den Fall von Zylinderkoordinaten  $r, \theta, z$ . Der Lösungsschlüssel, zu dem sie gelangt, wird auf verschiedene in der älteren Arbeit berührte typische Plattenprobleme angewendet („Hauptlösungen“) zwecks Gewinnung eines einheitlichen Ausgangspunktes für allgemeinere Fälle.

## Grundgleichungen

Sind im achsensymmetrischen Fall  $u_r, 0, u_z$  die Verschiebungskomponenten in Richtung  $r, \theta, z$ , also  $\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$  die Dehnungen,  $\Delta$  die kubische Dilation, ferner  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$  die Komponenten des Spannungszustandes, so haben wir die für das Volumelement geltenden Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \dots \dots (1).$$

Sie werden durch die zwischen den Spannungs- und den Formänderungskomponenten bestehenden Beziehungen

$$\sigma_r = \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_r; \quad \sigma_\theta = \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_\theta; \quad \sigma_z = \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_z; \quad \tau_{rz} = \mu \gamma_{rz} \dots (2)$$

mit  $\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$  übergeführt in die Grundgleichungen:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial (r\tilde{\omega})}{\partial r} = 0 \dots \dots (3).$$

Hierin ist  $2\tilde{\omega} = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}$  die einzige von null verschiedene Rotationskomponente. — Offenbar

besitzen  $\Delta = \varphi$  und  $\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} r\tilde{\omega} = \psi$  die Eigenschaften einer achsensymmetrischen Potentialfunktion und der dazu assoziierten Strömungsfunktion: Durch Gleichsetzen der beiden aus den

Grundgleichungen zu gewinnenden Werte von  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}$  ergibt sich

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \dots \dots (4),$$

<sup>1)</sup> Bd. 4 (1924), S. 361–376.

<sup>2)</sup> Z. angew. Math. Mech. Bd. 28 (1948), S. 161–166.

<sup>3)</sup> Z. angew. Math. Mech. Bd. 30 (1950), S. 50–61.



die bekannte Tatsache, daß die kubische Dehnung der Potentialgleichung genügt. Andererseits erhält man durch Gleichsetzen der beiden aus den Grundgleichungen zu entnehmenden Werte

von  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}$  die Beziehung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots \quad (5),$$

d. h. die für eine achsensymmetrische Strömung charakteristische Gleichung.

Die Lösung der Grundgleichungen (3) wird nunmehr (in Anlehnung an den 1948 gegebenen Algorithmus in räumlichen Polarkoordinaten) auf zwei einer erzeugenden Funktion  $F$  entsprechende Anteile gestützt:

Erster Anteil:  $u_r = 0; u_z = c_1 \frac{1 + \sigma}{E} \left\{ (1 - \sigma) \nabla^2 F + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right\}$ .

Ihm entspricht:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = c_1 \frac{1 + \sigma}{E} \left\{ (1 - 2\sigma) \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} \right\}; \\ 2\tilde{\omega}_1 &= \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = -c_1 \frac{1 + \sigma}{E} \left\{ (1 - 2\sigma) \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Zweiter Anteil:  $u_r = -c_2 \frac{1 + \sigma}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}; u_z = c_2 \frac{1 + \sigma}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ .

Ihm entspricht:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= -c_2 \frac{1 + \sigma}{E} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}; \\ 2\tilde{\omega}_2 &= -c_2 \frac{1 + \sigma}{E} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial z^2} - c_2 \frac{1 + \sigma}{E} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} = -c_2 \frac{1 + \sigma}{E} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Durch Kopplung der beiden Anteile entsteht:

$$\begin{aligned} \Delta &= c_1 \frac{1 + \sigma}{E} (1 - 2\sigma) \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial z} + (c_1 - c_2) \frac{1 + \sigma}{E} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}; \\ 2\tilde{\omega} &= -c_1 \frac{1 + \sigma}{E} (1 - 2\sigma) \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial r} - c_1 \frac{1 + \sigma}{E} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) - 2c_2 \frac{1 + \sigma}{E} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Für  $c_1 = c_2 = c$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta &= c \frac{1 + \sigma}{E} (1 - 2\sigma) \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial z}; \\ 2\tilde{\omega} &= -c \frac{1 + \sigma}{E} (1 - 2\sigma) \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial r} - c \frac{1 + \sigma}{E} \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial r} - 2c \frac{1 + \sigma}{E} (1 - \sigma) \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial r}. \end{aligned}$$

Mit diesen Werten von  $\Delta$  und  $2\tilde{\omega}$  wird die erste der beiden Grundgleichungen (3) *identisch* befriedigt. Andererseits ergibt sich durch Einsetzen in die zweite dieser Grundgleichungen die Forderung:

oder

$$\left. \begin{aligned} (1 - 2\sigma) \frac{\partial^2 \nabla^2 F}{\partial z^2} + \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma} (1 - \sigma) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial r} \right] &= 0 \\ \frac{\partial^2 \nabla^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial r} + \frac{\partial^2 (\nabla^2 F)}{\partial z^2} &= \nabla^2 \nabla^2 F = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6),$$

d. h. die erzeugende Funktion muß der Bipotentialgleichung genügen<sup>4)</sup>. Wir stellen die Grundformeln, auf die man sich bei gegebener erzeugender Funktion  $F$  zu stützen hat, noch einmal zusammen:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}; & u_z &= (1 - 2\sigma) \nabla^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}; \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \Delta &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \\ \sigma_r &= \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \Delta + \frac{E}{1 + \sigma} \varepsilon_r; & \sigma_\theta &= \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \Delta + \frac{E}{1 + \sigma} \varepsilon_\theta; \\ \sigma_z &= \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \Delta + \frac{E}{1 + \sigma} \varepsilon_z; & \tau_{rz} &= \frac{E}{2(1 + \sigma)} \gamma_{rz} \end{aligned} \right\} (7).$$

<sup>4)</sup> Zu demselben Ergebnis gelangt auf umständlicherem Wege A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität 1907, S. 317.

Wir überzeugen uns zunächst, wie die elementaren Deformationsfälle gleichförmiger Zug- bzw. Druckbeanspruchung eines Rotationszylinders aus der erzeugenden Funktion

$$F = cr^2z + z^3 \quad \dots \dots \dots (8)$$

gewonnen werden. ( $\nabla^2 F = 4cz + 6z$ , also  $\nabla^2 \nabla^2 F = 0$ ).

$$u_r = -\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} = -2cr; \quad u_z = (1-2\sigma) \nabla^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial z} = (1-2\sigma)(4cz + 6z) + 4cz;$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -2c; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = -2c; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = (4c + \sigma)(1-2\sigma) + 4c;$$

$$\Delta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = (4c + 6)(1-2\sigma); \quad \gamma_{rz} = 0.$$

$$\sigma_r = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \Delta + \frac{E}{1+\sigma} \varepsilon_r = \frac{E\sigma}{1+\sigma} (4c + 6) - 2c \frac{E}{1+\sigma};$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \Delta + \frac{E}{1+\sigma} \varepsilon_\theta = \frac{E\sigma}{1+\sigma} (4c + 6) - 2c \frac{E}{1+\sigma}; \quad \tau_{rz} = 0.$$

$$\sigma_z = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \Delta + \frac{E}{1+\sigma} \varepsilon_z = \frac{E\sigma}{1+\sigma} (4c + 6) + \frac{E}{1+\sigma} [(4c + 6)(1-2\sigma) + 4c];$$

Soll Radialspannung verschwinden, so muß  $(4c + 6)\sigma - 2c = 2c(2\sigma - 1) + 6\sigma = 0$  sein, also

$$c = \frac{3\sigma}{1-2\sigma}; \quad F = \frac{3\sigma}{1-2\sigma} r^2 z + z^3.$$

Soll Vertikalzugspannung verschwinden, so muß  $\sigma(4c + 6) + (1-2\sigma)(4c + 6) + 4c = 0$  sein, also

$$c = -\frac{3}{2} \frac{1-\sigma}{2-\sigma}; \quad F^* = -\frac{3}{2} \frac{1-\sigma}{2-\sigma} r^2 z + z^3.$$

Mit dem letzteren Ergebnis ist die erste Hauptlösung für das achsensymmetrische Problem der Kreisplatte im Rahmen der Bipotentialfunktionen aufgezeigt, mit der man allgemein die in die Ebene der Platte fallenden, am Rande resultierenden Zug- bzw. Druckkräfte erfaßt.

Für das entsprechende Anliegen bezüglich der Platte, an deren Rande gleichmäßig verteilte Biegemomente wirken, benötigen wir erzeugende Funktionen vierten Grades.

#### 1. Harmonische Spannungsfunktion 4. Grades:

$$F_{\text{I}} = \frac{1}{48} (3r^4 - 24r^2z^2 + 8z^4) \quad \dots \dots \dots (9).$$

Mit  $\nabla^2 F_{\text{I}} = 0$  ergibt sich gemäß (7):  $u_r = 2rz$ ;  $u_z = r^2 - 2z^2$ ;

$$\varepsilon_r = 2z; \quad \varepsilon_\theta = 2z; \quad \varepsilon_z = -4z; \quad \Delta = 0; \quad \gamma_{rz} = 4r;$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\sigma} 2z; \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1+\sigma} 2z; \quad \sigma_z = -\frac{E}{1+\sigma} 4z; \quad \tau_{rz} = \frac{E}{1+\sigma} 2r.$$

#### 2. Biharmonische Spannungsfunktion 4. Grades:

$$F_{\text{II}} = \frac{1}{2} (r^4 - r^2z^2 - 2z^4); \quad \nabla^2 F_{\text{II}} = 7r^2 - 14z^2;$$

$$u_r = 2rz; \quad u_z = (1-2\sigma)7(r^2 - 2z^2) + 8r^2 - 2z^2; \quad \varepsilon_r = 2z; \quad \varepsilon_\theta = 2z;$$

$$\varepsilon_z = -28(1-2\sigma)z - 4z; \quad \Delta = -28(1-2\sigma)z; \quad \gamma_{rz} = (32 - 28\sigma)r;$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\sigma} (-28\sigma + 2) \cdot z; \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1+\sigma} (-28\sigma + 2)z;$$

$$\sigma_z = -\frac{E}{1+\sigma} (8 - 7\sigma)4z; \quad \tau_{rz} = \frac{E}{1+\sigma} (8 - 7\sigma)2r$$

(9').

Man kann die beiden Spannungsfunktionen  $F_{\text{I}}$ ,  $F_{\text{II}}$  so kombinieren, daß  $\sigma_z$  und  $\tau_{rz}$  gleichzeitig verschwinden. Damit ergibt sich die zweite Hauptlösung für die Kreisplatte:

$$F^{**} = (8 - 7\sigma) F_{\text{I}} - F_{\text{II}};$$

$$u_r = (1 - \sigma) \cdot 14rz; \quad u_z = -7(1 - \sigma)r^2 - 14z^2;$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 14Ez; \quad \sigma_z = 0; \quad \tau_{rz} = 0.$$



Auf die Längeneinheit des Kreisrandes der Platte von der Dicke  $2h$  erhält man als resultierendes Biegemoment  $\frac{28}{3} E h^3$ . Wie der Ausdruck für  $u_z$  zeigt, wölbt sich die Mittelfläche  $z = 0$  der Kreisplatte, die nur durch gleichmäßig über den Rand verteilte Biegemomente beansprucht wird, zu einer parabolisch gekrümmten Fläche.

Die Kombination  $F^{**}$  stellt die zweite Hauptlösung für die achsensymmetrische Deformation der Kreisplatte  $z = \pm h$ ,  $r = a$  dar, mit der man allgemein die Randmomente erfaßt. Hat man irgendeine den Bedingungen für die Oberfläche  $z = \pm h$  genügende Lösung, so kann man die Befriedigung der Bedingungen bezüglich der Randmomente durch Überlagerung einer zweiten Hauptlösung erzielen.

Als Material für die Weiterführung des Problems des achsensymmetrisch belasteten Kreiszylinders, für den auf der Mantelfläche  $r = a$  die Normalspannungen und die Tangentialspannungen als Potenzreihen in  $z$  gegeben sind, vermerken wir die den Erzeugenden fünften Grades entsprechenden Lösungen.

#### 1. Harmonische Erzeugende 5. Grades:

$$\begin{aligned} F_I &= \frac{1}{8} (8z^5 - 40r^2z^3 + 15zr^4); & u_r &= 30rz^2 - \frac{15}{2} r^3; & u_z &= -10z^3 + \frac{45}{2} r^2z; \\ \varepsilon_r &= 30z^2 - \frac{45}{2} r^2; & \varepsilon_\theta &= 30z^2 - \frac{15}{2} r^2; & \varepsilon_z &= -60z^2 + 30r^2; & \Delta &= 0; & \gamma_{rz} &= 120rz; \\ \sigma_r &= 15 \frac{E}{1+\sigma} \left( 2z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right); & \sigma_\theta &= 15 \frac{E}{1+\sigma} \left( 2z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right); \\ \sigma_z &= 30 \frac{E}{1+\sigma} (-2z^2 + r^2); & \tau_{rz} &= \frac{E}{1+\sigma} 60rz. \end{aligned}$$

#### 2. Biharmonische Erzeugende 5. Grades:

$$\begin{aligned} F_{II} &= \frac{1}{6} (3r^4z + r^2z^3 - 2z^5); & \nabla^2 F &= 9r^2z - 6z^3; \\ u_r &= -2r^3 - rz^2; & u_z &= (17 - 18\sigma)r^2z + \left( -\frac{16}{3} + 12\sigma \right) z^3; \\ \varepsilon_r &= -6r^2 - z^2; & \varepsilon_\theta &= -2r^2 - z^2; & \varepsilon_z &= (17 - 18\sigma)r^2 - 3 \left( \frac{16}{3} - 12\sigma \right) z^2; \\ \Delta &= 9(1 - 2\sigma)(r^2 - 2z^2); & \gamma_{rz} &= 4(8 - 9\sigma)rz; \\ \sigma_r &= \frac{E}{1+\sigma} [(9\sigma - 6)r^2 - (1 + 18\sigma)z^2]; & \sigma_\theta &= \frac{E}{1+\sigma} [(9\sigma - 2)r^2 - (1 + 18\sigma)z^2]; \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\sigma} (17 - 9\sigma)r^2 + (18\sigma - 16)z^2; & \tau_{rz} &= \frac{2E}{1+\sigma} (8 - 9\sigma)rz. \end{aligned}$$

Besonders wichtig für das Problem der achsensymmetrisch beanspruchten Kreisplatte sind die geeignet normierten Erzeugenden sechsten Grades.

#### 1. Harmonische Spannungsfunktion 6. Grades:

$$\begin{aligned} F_I &= 4z^6 - 30z^4r^2 + \frac{45}{2} z^2r^4 - \frac{5}{4} r^6; & u_r &= 80z^3r - 60r^3z; & u_z &= -40z^4 + 120z^2r^2 - 15r^4; \\ \varepsilon_r &= 80z^3 - 180r^2z; & \varepsilon_\theta &= 80z^3 - 60r^2z; & \varepsilon_z &= -160z^3 + 240r^2z; \\ \Delta &= 0; & \gamma_{rz} &= 480z^2r - 120r^3; \\ \sigma_r &= \frac{E}{1+\sigma} (80z^3 - 180r^2z); & \sigma_\theta &= \frac{E}{1+\sigma} (80z^3 - 60r^2z); \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\sigma} (-160z^3 + 240r^2z); & \tau_{rz} &= \frac{E}{1+\sigma} (240z^2r - 60r^3). \end{aligned}$$

## 2. Biharmonische Spannungsfunktion 6. Grades:

$$F_{II} = \frac{3}{2} r^4 z^2 - 4 r^2 z^4 + \frac{4}{5} z^6; \quad \nabla^2 F_{II} = 3 r^4 - 24 r^2 z^2 + 8 z^4;$$

$$u_r = -12 r^3 z + 32 r z^3; \quad u_z = (1 - 2\sigma)(3 r^4 - 24 r^2 z^2 + 8 z^4) + 24 r^2 z^2 - 16 z^4;$$

$$\varepsilon_r = -36 r^2 z + 32 z^3; \quad \varepsilon_\theta = -12 r^2 z + 32 z^3; \quad \varepsilon_z = (1 - 2\sigma)(-48 r^2 z + 32 z^3) + 48 r^2 z - 64 z^3;$$

$$\Delta = (1 - 2\sigma)(-48 r^2 z + 32 z^3); \quad \gamma_{rz} = 96(1 + \sigma) r z^2 - 24 \sigma r^3;$$

$$\sigma_r = \frac{E\sigma}{1+\sigma}(-48 r^2 z + 32 z^3) + \frac{E}{1+\sigma}(-36 r^2 z + 32 z^3);$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\sigma}{2+\sigma}(-48 r^2 z + 32 z^3) + \frac{E}{1+\sigma}(-12 r^2 z + 32 z^3);$$

$$\sigma_z = -\frac{16E}{1+\sigma}[2(1+\sigma)z^3 - 3\sigma r^2 z]; \quad \tau_{rz} = \frac{E}{1+\sigma}[48(1+\sigma)r z^2 - 12\sigma r^3].$$

Entscheidende Bedeutung für die durch Kombination der beiden Spannungsfunktionen 6. Grades zu gewinnenden Belastungsfälle hat nun die folgende Tatsache: Man kann die in den Ausdrücken für  $\sigma_z$  und  $\tau_{rz}$  vorkommenden mit  $r^2 z$  bzw.  $r^3$  proportionalen Glieder gleichzeitig zum Verschwinden bringen, wenn man die Spannungsfunktion  $F = F_I - 5 F_{II}$  zugrunde legt. Damit reduziert sich  $\sigma_z$  auf ein mit  $z^3$  und  $\tau_{rz}$  auf ein mit  $r z^2$  proportionales Glied. Sodann kann man diejenige aus den Spannungsfunktionen vierten Grades zu bildende Kombination heranziehen, für die  $\sigma_r, \sigma_\theta$  gleichzeitig verschwinden, während sich  $\sigma_z$  von der Form  $\text{const. } z$  und  $\tau_{rz}$  von der Form  $\text{const. } r$  ergibt. Durch Überlagerung eines solchen Spannungszustandes über die Kombination  $F = F_I - 5 F_{II}$  kann man offenbar  $\tau$  für  $z = \pm h$  zum Verschwinden bringen. Weiterhin kann man durch Überlagerung einer gleichmäßigen Zugspannung in der  $z$ -Richtung die Größe  $\sigma_z$  für  $z = -h$  annullieren. Wenn man schließlich noch das Biegemoment am Rande durch Hinzufügen einer zweiten Hauptlösung beseitigt und durch Überlagerung eines konstanten Gliedes in  $u_z$  das Verschwinden von  $u_z$  für  $z = 0, r = a$  herbeiführt, so ergibt sich für die durch gleichförmige Last  $p$  auf  $z = h$  beanspruchte, in  $r = a$  frei aufliegende Kreisplatte folgender Deformationszustand:

$$u_z = \frac{p r}{E} \left\{ \frac{1}{2} \sigma - \frac{3(1-\sigma)}{3z} \frac{z}{h^3} [(3+\sigma)a^2 - (1+\sigma)r^2] + \frac{3}{40} \frac{z}{h} (2+9\sigma-\sigma^2) - \frac{1}{8} \frac{z^3}{h^3} (2+\sigma-\sigma^2) \right\};$$

$$u_r = -\frac{p}{8\sigma} (a^2 - r^2) \left\{ \frac{1}{8} \frac{5+\sigma}{1+\sigma} a^2 - r^2 \right\} + \frac{1}{8} \frac{8+\sigma+\sigma^2}{1-\sigma^2} h^2 \left\{ \right\};$$

$$+ \frac{p z}{E} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{3\sigma}{32} \frac{z}{h^3} [(3+\sigma)a^2 - 2(1+\sigma)r^2] - \frac{3}{40} \frac{z}{h} (5+2\sigma+\sigma^2) + \frac{1}{16} \frac{z^3}{h^3} (1+\sigma^2) \right\};$$

$$\sigma_r = p \left\{ \frac{3}{32} \frac{z}{h^3} (3+\sigma)(r^2 - a^2) + (2+\sigma) \left( \frac{3}{40} \frac{z}{h} - \frac{1}{8} \frac{z^3}{h^3} \right) \right\};$$

$$\sigma_\theta = p \left\{ \frac{3}{32} \frac{z}{h^3} [-(3+\sigma)a^2 + (1+3\sigma)r^2] + (2+\sigma) \left( \frac{3}{40} \frac{z}{h} - \frac{1}{8} \frac{z^3}{h^3} \right) \right\};$$

$$\sigma_z = p \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{z}{h} \left( \frac{z^2}{h^2} - 3 \right) \right\}; \quad \tau_{rz} = \frac{3}{8} \frac{p}{h^3} r (h^2 - z^2).$$

Eingegangen am 25. September 1950.

## KLEINE MITTEILUNGEN

## Zum Zirkeltest der Integrieranlagen.

Meines Wissens existiert noch keine Theorie über die Fehler, die bei Integrieranlagen auftreten können. Um die Präzision von Reibradintegratoren zu untersuchen, werden diese sowohl einzeln wie auch in einfachen Schaltungen beobachtet. Insbesondere benutzt man bei vorwiegend qualitativen Untersuchungen eine Schaltung für die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung, wie sie in Bild 1 dargestellt ist.

Es handelt sich um zwei Integratoren  $J_1$  und  $J_2$  mit Reibscheiben und Reibrädern. Es messe  $y_i$  den Ab-

stand des Reibrades vom Reibscheibenmittelpunkt und  $z_i$  den Drehwinkel des Reibrades beim Integrator  $J_i$ . Beide Reibscheiben seien mit demselben unabhängigen Antrieb verbunden; es sei  $\alpha$  der Drehwinkel der Reibscheiben der beiden Integratoren. Bei passender Wahl der Maßeinheiten gilt

$$dz_i = y_i dx; \quad i = 1, 2, \dots \quad (1);$$

als Differentialgesetz der beiden Integratoren.

Nun ist die Schaltung in Abb. 1 so beschaffen, daß

$$y_1 = -z_2; \quad y_2 = z_1 \dots \dots (2)$$



gilt. Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{d^2 z_i}{dx^2} + z_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots \quad (3).$$

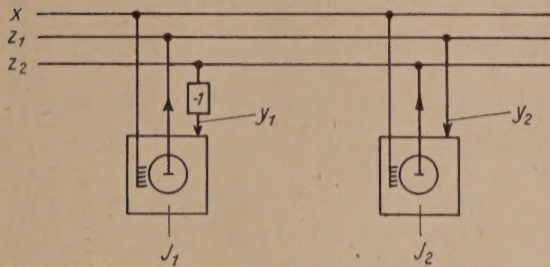


Bild 1.

Danach gilt allgemein

$$z_1 = A \sin x + B \cos x; \quad z_2 = B \sin x - A \cos x \quad (4)$$

mit Konstanten  $A$  und  $B$ , die sich aus den Abständen  $y_1$  und  $y_2$  der Reibräder für einen bestimmten Winkel  $x$ , etwa  $x = 0$ , berechnen. Werden  $z_1$  und  $z_2$  als kartesische Koordinaten übereinander aufgetragen, so entsteht ein Kreis, während die Schaltung angetrieben wird. Von einer guten Integrieranlage verlangt man, daß die gezeichnete Kurve sich schließt, wenn die Reibscheiben um  $x = 2\pi$  gedreht werden. Tatsächlich ist es möglich, Kreise von 40–50 cm Durchmesser zu zeichnen, bei denen Anfang und Ende ineinander übergehen und erst nach etwa 5–6 Umläufen Abweichungen vom ersten Kreise auffallen.

Im folgenden soll dargelegt werden, daß als Folge von Getriebelose (backlash) Spiralen geschrieben werden, die sich von Umlauf zu Umlauf verbreitern.

#### §1. $y_1$ und $y_2$ sind nichtlineare Funktionen von $z_2$ bzw. $z_1$ .

Wir untersuchen zunächst den Fall, daß Instrumentenfehler existieren, die die Relationen (2) verfälschen, jedoch nach wie vor  $y_1$  als eindeutige Funktion von  $z_2$ ,  $y_2$  als eindeutige Funktion von  $z_1$  erscheinen lassen. Wir schreiben

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -z_2 - f(z_2) = -\varphi(z_2) \\ y_2 &= z_1 + g(z_1) = \psi(z_1) \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

und setzen voraus, daß  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  für  $-\infty < x < \infty$  stetig definiert sind, monoton zunehmen, und daß die Ungleichungen

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq M \quad (3)$$

mit einer gewissen Konstanten  $M$  bestehen.

Zur Abkürzung setzen wir

$$\int_0^\xi \varphi(x) dx = F(\xi); \quad \int_0^\xi \psi(x) dx = G(\xi) \quad (4).$$

Dann folgt aus (1), (2') und (4)

$$\frac{dz_1}{dx} = -F'(z_2); \quad \frac{dz_2}{dx} = G'(z_1),$$

$$\frac{dz_2}{dx} F'(z_2) + \frac{dz_1}{dx} G'(z_1) = 0$$

und somit

$$H(z_1, z_2) = F(z_2) + G(z_1) = C = \text{const.} \quad (5).$$

Wegen (3) gilt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) = +\infty, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} G(x) = +\infty;$$

ferner besitzen  $F(x)$  und  $G(x)$  wegen der Monotonie von  $\varphi$  und  $\psi$  ein wohlbestimmtes Minimum. Nach links und nach rechts vom Minimum wachsen  $F(x)$  und  $G(x)$  monoton gegen Unendlich. Auf die  $(z_1, z_2)$ -Ebene

bezogen, existiert daher ein wohlbestimmtes Minimum von  $H(z_1, z_2)$ , und längs jedem von der Minimalstelle ausgehenden Halbstrahl wächst  $H(z_1, z_2)$  monoton gegen Unendlich. Für  $C > \text{Min } H$  definiert daher die Gl. (5) eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve der  $(z_1, z_2)$ -Ebene. Mit anderen Worten:

Der Zirkeltest ergibt geschlossene Kurven.

In (2') gehen im wesentlichen die Fehler von Leitspindeln ein, die zur Verschiebung der Reibräder dienen.

#### §2. Der Einfluß der Getriebelose.

Außer den zu (2') führenden Fehlern, die eine Abweichung von den Relationen (2) verursachen, kommen im wesentlichen nur noch die Losefehler der Getriebeleitungen in Frage. Der Losefehler läßt sich an einem einfachen mechanischen Modell leicht erklären. In Bild 2 bedeuten 1 und 2 zwei in Pfeilrichtung hin- und herbewegbare Teile, von denen das Teil 1 eine Kerbe, das Teil 2 eine in die Kerbe hineinragende Nase aufweist. Wenn das Teil 1 bewegt wird, nimmt es das Teil 2 mit; der Zusammenhang zwischen dem Weg  $u(t)$  des Teiles 1 und dem Weg  $v(t)$  des Teiles 2 ( $t$  = Zeit) ist nicht linear, wenn die Nase die Kerbe nicht völlig ausfüllt. Es sei die Kerbe um die Länge  $2a$  breiter als die Nase. Ferner sei

$$u(t) = A \sin t; \quad A > 2a; \quad (t \geq 0) \quad (6),$$

und  $u = v$ , wenn die Nase sich genau in der Mitte der Kerbe befindet.

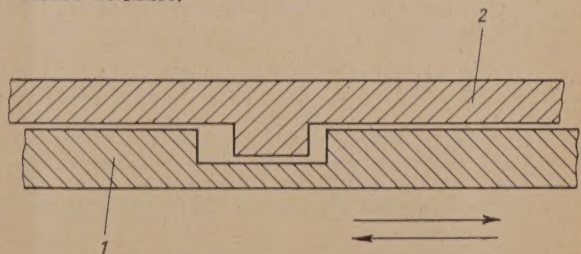


Bild 2.

Dann nimmt  $v(t)$  unter Vernachlässigung der Massenträgheit des Teiles 2 den aus Bild 3 ersichtlichen Verlauf  $x$ . Es ist

$$v = u - a \quad \text{zumindest für } \arcsin \frac{2a}{A} \leq t \leq \pi/2,$$

$$v = A - a \quad \text{für } \frac{\pi}{2} \leq t \leq h + \pi/2,$$

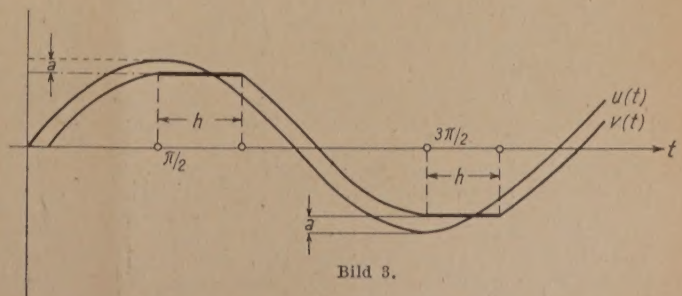


Bild 3.

wobei  $h$  durch die Gleichungen  $0 \leq h \leq \pi/2$ ;

$A \sin(\frac{\pi}{2} + h) = A - 2a$  definiert ist. Ferner ist

$$v = u + a \quad \text{für } \pi/2 + h \leq t \leq 3\pi/2$$

$$v = -A + a \quad \text{für } \frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} + h$$

$$v = u - a \quad \text{für } \frac{3\pi}{2} + h \leq t \leq 5\pi/2$$



und so fort. Von gewissen Umgebungen der Extremwerte von  $u(t)$  abgesehen, gilt also

$$v(t) = u(t) - a \operatorname{sgn} \dot{u}(t). \quad (7)$$

Es ist nützlich, das Integral

$$J = \int_x^{x+2\pi} (u(t) - v(t)) \cdot \dot{u}(t) dt \quad \text{für } x \geq \arcsin \frac{2a}{A}$$

zu berechnen; diejenigen Intervalle, in denen  $v$  konstant ist, liefern keinen Beitrag zu  $J$ . Die anderen ergeben

$$J = 4a(A - a)^2 \quad (8)$$

Dies vorausgeschickt, nehmen wir an, daß die Beziehung (2) durch Getriebelese verfälscht werden. Wir schreiben jetzt

$$y_1 = -z_2 + \Delta z_2, \quad y_2 = z_1 - \Delta z_1 \dots (2'')$$

wobei

$$\Delta z_2 = a_2 \operatorname{sgn} \dot{z}_2, \quad \Delta z_1 = a_1 \operatorname{sgn} \dot{z}_1 \dots (9)$$

die Losefehler bis auf gewisse Umgebungen der Extremwerte von  $z_1$  und  $z_2$  darstellen.

Dabei kennzeichnet  $a_1 \geq 0$  die Lose in der Getriebeleitung vom Ausgang  $z_1$  zum Eingang  $y_2$ ,  $a_2 \geq 0$  die Lose der Getriebeleitung vom Ausgang  $z_2$  zum Eingang  $y_1$ . Auch in den Phasen des Zirkeltests, in denen (9) nicht gilt, ist aber

$$|\Delta z_1| \leq a_1; \quad |\Delta z_2| \leq a_2 \dots (10)$$

erfüllt.

Wenn  $x$ , der Drehwinkel der beiden Reibscheiben, monoton wächst, so kann man den Losefehler auf  $x$  statt auf die Zeit  $t$  beziehen. Welchen Verlauf auch immer die Losefehler  $\Delta z_1(x)$  und  $\Delta z_2(x)$  nehmen mö-

<sup>1)</sup> Diese Formel ist noch weitgehender Verallgemeinerung fähig. Man bemerkt z. B., daß gewisse Variationen von  $u = A \cdot \sin t$  für  $x < t < x + 2\pi$  das Integral nicht ändern.

gen, stets gilt

$$\begin{aligned} z_1 &= A \sin x + B \cos x + \int_0^x \left| \frac{\cos(x-t) \sin(x-t)}{\Delta z_1(t)} \right| dt \\ z_2 &= B \sin x - A \cos x + \int_0^x \left| \frac{\sin(x-t) - \cos(x-t)}{\Delta z_2(t)} \right| dt \end{aligned} \quad (11)$$

mit geeigneten Konstanten  $A$  und  $B$  als allgemeine Lösung der Gleichungen (1) und (2''), falls  $\Delta z_1$  und  $\Delta z_2$  als unabhängige Störfunktionen angesehen werden. Aus (10) und (11) folgt

$$\begin{aligned} |z_1 - A \sin x - B \cos x| &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot x \\ |z_2 - B \sin x + A \cos x| &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot x \end{aligned} \quad (12)$$

für  $x \geq 0$ . Solange demnach

$$x(a_1^2 + a_2^2) \ll A^2 + B^2 = C^2; \quad C > 0 \dots (13)$$

ist, können  $z_1$  und  $z_2$  in erster Näherung als Sinusschwingungen angesehen werden. Alsdann läßt sich die Formel (8) anwenden, die auf eine Sinusschwingung Bezug nimmt. Es gilt also näherungsweise

$$x + 2\pi n \int_x^{x+2\pi n} \Delta z_i(x) \dot{z}_i dx \approx 4n a_i (C - a_i) \approx 4n a_i C \quad (14),$$

wobei  $n$  eine ganze Zahl ist. Andererseits folgt aus (1) und (2'')

$$\frac{d}{dx} (z_1^2 + z_2^2) = 2 \dot{z}_1 \Delta z_1 + 2 \dot{z}_2 \Delta z_2 \dots (15).$$

Zusammen liefern (14) und (15) die Formel

$$(z_1^2 + z_2^2)_{x+2\pi n} - (z_1^2 + z_2^2)_x = 8n(a_1 + a_2)C \quad (16).$$

Der Zirkeltest liefert daher, wie eingangs behauptet, eine sich verbreiternde Spirale, die in erster Näherung als Kreis mit dem Radius  $C$  angesehen werden kann. Bemerkenswert ist der Umstand, daß die Losefehler im gleichen Sinne auf eine Vergrößerung der Kreisradien mit jedem Umlauf um den konstanten Betrag  $4(a_1 + a_2)$  hinwirken. Durch Beobachtung einer größeren Zahl von Umläufen ist daher eine genaue Messung von  $(a_1 + a_2)$  möglich.

Minden.

Hans Bückner.

## BUCHBESPRECHUNGEN

**Federhofer, K.** (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Graz), Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. In drei Teilen. I. Teil: Statik. 165 Aufgaben nebst Lösungen. V + 130 S. mit 243 Abb. Wien 1950. Springer-Verlag. Preis 9,60 DM.

Das Studium der Mechanik erfordert außer der reinen Beschäftigung mit den theoretischen Grundlagen vor allem die selbständige Bearbeitung von Anwendungsbeispielen. Eine hierfür geeignete Aufgabensammlung wurde im Jahre 1907 vom damaligen Grazer Mechanik-Professor F. Wittenbauer herausgegeben und erlebte im Jahre 1929 in der Bearbeitung von Th. Pöschl ihre 6. Auflage, ist jedoch seit geraumer Zeit vergriffen. Die Aufgabensammlung von L. Föppl kam der regen Nachfrage bereits entgegen. Nunmehr legt der Nachfolger Wittenbauers in Graz, K. Federhofer eine eigene Aufgabensammlung vor, die auf dem Boden einer ca. 30-jährigen Lehrtätigkeit erwachsen ist und sich in folgende Gebiete gliedert: Ebene Kraftsysteme und deren Gleichgewicht, — Schwerpunkte ebener Flächen, — Ebene Fachwerke, — Biegemomente, Quer- und Längskräfte gerader Träger, — Dreigelenkbogen, — Raumkraftsystem, — Seil- und Kettenlinien, — Stabilität des Gleichgewichts. Den weitaus größten Raum nehmen Beispiele der ebenen Statik ein, wobei auch die Er-

mittlung der Verteilung sämtlicher Schnittgrößen (Biegemoment, Längs- und Querkraft) erörtert wird, wenn auch diese Größen erst in der Festigkeitslehre ihre Bedeutung erlangen. Bei Besprechung einzelner Aufgaben macht Verf. zuweilen auch von der Vektorrechnung und anderen Hilfsmitteln (projektive Geometrie, Mayor-Mises-Abbildung) mit Vorteil Gebrauch. Bemerkenswert ist, daß der Abschnitt über Seillinien auch Aufgaben über die Formbestimmung von Zylinderschalen gleicher Festigkeit und über weit gespannte Kabel enthält. Das Verständnis wird durch ausreichenden Text und sorgfältig ausgeführte Abbildungen erleichtert, so daß dem Studierenden mit dem vorliegenden Buche ein neues brauchbares Hilfsmittel zum Selbststudium in die Hand gegeben wird.

Dresden.

H. Neuber.

**Föppl, L.** (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule München) und **E. Mönch** (a. o. Prof. a. d. Univ. Tucuman), Praktische Spannungsoptik. VII + 162 S. mit 135 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis geb. 21,— DM.

Die spannungsoptische Methode zur Untersuchung der Spannungsverteilung in Konstruktionsteilen an Modellen aus Kunstharz hat mehr und mehr an Bedeutung gewonnen. Besondere Verfahren der Modellherstellung und -behandlung wurden entwickelt. Das vorliegende Buch von L. Föppl und seinem Schüler



E. Mönch vermittelt die im Münchener Laboratorium in den letzten Jahren gesammelten vielseitigen praktischen Erfahrungen und bildet so eine wichtige Ergänzung der bisherigen, in Deutschland erschienenen Literatur auf diesem Gebiete, welche im wesentlichen nur die Grundlagen vermittelte.

Dresden.

H. Neuber.

**Dr.-Ing. Fritz Leonhardt und Dipl.-Ing. Wolfhart Andrä, Die vereinfachte Trägerrostberechnung.** Mit 52 Hilfstafeln für die genaue und genäherte Berechnung von Rosten mit einem oder mehreren Querträgern, Angaben über Modelluntersuchungen und 7 Beispielen für die praktische Anwendung. 2. erweiterte Auflage. IV + 250 S. mit 247 Abb. und Tab. Stuttgart 1950. Verlag Julius Hoffmann. Preis geb. 32,— DM.

Die Verbindung zweier sich in der Regel rechtwinklig kreuzender Scharen von Trägern hat in der jüngsten Zeit durch den Bau von Straßenbrücken und schwerbelasteten Trägerdecken besondere Bedeutung erhalten. Daher ist nach der Literatur wiederholt versucht worden, die allgemein bekannten Ansätze zur statischen Berechnung der Schnittkräfte dieser hochgradig statisch unbestimmten Tragwerke für die üblichen Bauformen unter plausiblen Annahmen zu zweckgebundenen Rechenvorschriften zu entwickeln und damit die Lösung der Aufgabe zu vereinfachen. Die Arbeit der beiden Verfasser ist eine Erweiterung der Anleitung für die vereinfachte Trägerrostberechnung von F. Leonhardt, die im Jahre 1940 erschienen ist. Die neue Auflage behandelt jedoch nicht nur den Trägerrost mit einem Querträger, sondern auch mit mehreren Querträgern, wie dies in ähnlicher Weise von E. Metan und R. Schindler gezeigt worden ist. Der Trägerrost mit einem Querträger und beliebig einander zugeordneten und gestützten Hauptträgern kann ohne Schwierigkeiten nach den bekannten Ansätzen für die statische Untersuchung des elastisch gestützten durchlaufenden Trägers berechnet werden. Die Übertragung der Lösung auf den Rost mit mehreren Querträgern ist nur als Abschätzung zu bewerten, deren Brauchbarkeit für Vorberechnungen untersucht worden ist. Die genaue Lösung der Aufgabe beruht, kurz zusammengefaßt, auf der zweifachen Umordnung von Belastung und statisch unbestimmten Größen bei gleichfeldrigen Tragwerken, um die gegenseitige Abhängigkeit der Überzähligen zu beschränken. Die Grundlagen sind ausführlich entwickelt, zu Rechenvorschriften erweitert und durch zahlreiche Tafeln und Tabellen zur unmittelbaren Berechnung von Trägerrosten erweitert worden. Den Abschluß der Arbeit bilden Angaben über die Untersuchung von Trägerrosten mit Modellen und Beispiele zur Anwendung der Theorie im Stahl- und Stahlbetonbau. Das Buch der beiden Verfasser ist eine wertvolle Bereicherung der Fachliteratur, das allen Fachleuten, die sich mit der allgemeinen Anordnung und mit der statischen Untersuchung von Trägerrosten befassen, gute Dienste leisten wird.

Dresden.

K. Beyer.

**Dr.-Ing. habil. Ferdinand Schleicher** (ehedem o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin), Taschenbuch für Bauingenieure mit Beiträgen zahlreicher Fachleute. XXIII + 1942 S. mit 2403 Abb. Berichtigter Neudruck. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis geb. 36,— DM.

Das Taschenbuch für Bauingenieure ist der Fachwelt bereits durch die von M. Förster, weiland o. Professor a. d. Techn. Hochschule Dresden, herausgegebenen und in den Jahren 1911 bis 1928 erschienenen 5 Auflagen bekannt und durch seinen umfassenden Inhalt zu einem wertvollen Hilfsmittel des wissen-

schaftlich arbeitenden Bauingenieurs geworden. Die Erweiterung der Erkenntnis auf allen Teilgebieten der Bauingenieurwissenschaften hat zu einer vollständigen Neubearbeitung geführt, die F. Schleicher gemeinsam mit zahlreichen hervorragenden Fachleuten übertragen worden ist und zu einer wesentlichen Erweiterung und Vertiefung des Inhalts geführt hat. Das neue Taschenbuch ist im Jahre 1943 erschienen, die Neuauflage vom Jahre 1949 ein berichtigter Neudruck. Das Werk behandelt zunächst die Grundwissenschaften des Bauingenieurs, also Mathematik, technische Mechanik, Hydromechanik, Bodenmechanik, Festigkeitslehre und Elastizitätstheorie. Das eigentliche Fachgebiet ist, um nur die wichtigsten Abschnitte zu nennen, durch die Baustatik, die Baustofflehre, die Vermessungskunde, die Verkehrswirtschaft, den Straßenbau, das Eisenbahnwesen mit Erd- und Tunnelbau, den Wasserbau mit der Wasserwirtschaft, den Grundbau, den See- und Hafenbau, den Städtebau und städtischen Tiefbau, den Massivbau und Stahlbetonbau, den Stahlbau und durch eine Einführung in die für den Bauingenieur besonders wichtigen Teilgebiete des Maschinenbaues vertreten. Alle Abschnitte tragen wissenschaftlichen Charakter und bieten durch ihre theoretische Fundierung und ihre Auswertung und Verbindung mit der Bau erfahrung weit mehr, als dies die bescheidene Bezeichnung „Taschenbuch“ erwarten läßt. Es ist das Handbuch des Bauingenieurs, aus dem nicht nur der junge Student, sondern wohl alle, die sich diesem schönen Beruf gewidmet haben, bei allen Bauaufgaben mit Erfolg Rat und Hilfe holen werden. Dies wird durch die kurze, klare Zusammenfassung des Wesentlichen, durch zahlreiche, gut ausgewählte Abbildungen, durch wertvolle Tabellen, Rechenvorschriften und Anwendungsbeispiele, vor allem aber durch die hervorragende Ausstattung unterstützt, die dem Taschenbuch für Bauingenieure auch in Zukunft die beherrschende Stellung in der Literatur der Bauingenieurwissenschaften sichern wird.

Dresden.

K. Beyer.

**Federhofer, K.** (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Graz), *Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes.* XII + 179 S. mit 35 Abb. und 36 Zahlentafeln. Wien 1950. Springer-Verlag. Preis 23,— DM.

Nicht nur im Bauwesen, sondern auch im Maschinenbau bilden die Bogenträger wichtige Bauelemente, die der wissenschaftlichen Festigkeitsforschung mannigfache Anregungen gegeben haben. Die Statik der Bogenträger wurde in vielen Arbeiten des In- und Auslandes analysiert und weitgehend für graphische Methoden zugänglich gemacht. Dagegen kann die Dynamik der Bogenträger noch nicht als abgeschlossenes Gebiet angesehen werden, so daß der Versuch des Verf. sehr zu begrüßen ist, die hier noch bestehende Lücke durch eine umfassende Darstellung auszufüllen. Dies gilt umsomehr, als er innerhalb der dynamischen Probleme der Bogenträger und Kreisringe eine weitgehende Abrundung der wissenschaftlichen Durchdringung erreichen konnte, wobei ihm vor allem eigene theoretische Arbeiten zustatten kamen, die zum Teil noch nicht an anderer Stelle veröffentlicht sind. Andererseits konnten die theoretischen Ergebnisse durch inzwischen bekannt gewordene Versuchsberichte anderer Autoren bestätigt werden. Die Praxis wird das vorliegende Buch in vielfacher Hinsicht begrüßen, da verwandte Probleme sowohl bei Schwingungen von Bogenbrücken wie auch von Leitungsrohren unter Innen- und Außendruck, ferner bei rotierenden elektrischen Maschinen und in ähnlichen Fällen auftreten.

Dresden.

H. Neuber.



## NACHRICHTEN

### Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Freiburg/Br.

In der Zeit vom 28. bis 31. März 1950 fand die diesjährige Tagung der GaMM in Freiburg/Br. statt. Sie war von weit über 200 Teilnehmern besucht, unter anderem auch von zahlreichen Ausländern aus England, Frankreich, Holland, Italien, Österreich, Schweden, der Schweiz, den USA, Süd-Afrika usw. Nach den Ansprachen des Vorsitzenden der GaMM — Prof. Grammel, des Rektors der Universität Freiburg — Prof. Oelkers und des Oberbürgermeisters der Stadt Freiburg — Dr. Hoffmann, begann die eigentliche Tagung am Donnerstag Vormittag. Im ganzen wurden etwa 75 Vorträge aus den Gebieten der praktischen Mathematik, der Elastomechanik und der Strömungsforschung gehalten. Die Themen dieser Vorträge hier anzugeben erübrigt sich, da eins der nächsten Hefte dieser Zeitschrift Vortragsauszüge und spätere Hefte einige Vorträge in extenso bringen werden. Der Donnerstag Vormittag und der Sonnabend waren allgemein interessierenden Vorträgen gewidmet, während am Donnerstag Nachmittag und Freitag Parallel-Sitzungen abgehalten werden mußten. Am Freitag früh fand die Mitgliederversammlung der GaMM statt. In ihr wurde unter anderem mitgeteilt, daß die Mitgliederzahl im Laufe des letzten Jahres von 211 auf etwa 340 angewachsen sei, daß sie sich also um mehr als 50% erhöht habe. Der Mitgliederbeitrag wurde wieder auf DM 5,00 festgesetzt. Statt der aus den Vorstandsrat ausscheidenden Herren Pöschl und Weber wurden die Herren Hamel und Mettler gewählt. Der Ort der nächsten Tagung konnte noch nicht bestimmt werden, doch soll die Tagung diesmal in Norddeutschland stattfinden. Der durch den Vorstand vollzogene Beitritt der GaMM zur JUTAM, die 1948 gegründet wurde, ein Band zwischen den einzelnen Fachorganisationen darstellt und deren Hauptzweck die Veranstaltung internationaler Tagungen ist, wurde gebilligt, zumal die Aufnahme in diese Organisation einstimmig erfolgt war. Im September 1951 wird die JUTAM ein Symposium in der Riviera veranstalten, dessen Thema „Nichtlineare Schwingungen“ ist.

Für die Möglichkeit von Einzelaussprachen, für die ein besonderer Raum zur Verfügung stand und für Veranstaltungen zur Erholung war im reichlichen Maß gesorgt. Es fand am Mittwoch ein Empfangsabend, am Donnerstag eine Vorstellung im Großen Haus auf Einladung der Stadt Freiburg statt. Für Freitag Abend waren die Mitglieder von M. Pène (Commissaire pour le Land Bade) zum Cocktail im Deutsch-Französischen Club geladen. Am Sonnabend Nachmittag fand ein Ausflug zum Schauinsland statt und am Sonntag machte dann noch ein Teil der Mitglieder eine Fahrt durch den Hochschwarzwald, ein anderer einen Ausflug nach Oberwolfach. Allgemein war man mit dem Verlauf der Tagung sehr zufrieden und es sei auch hier dem Organisator dieser Zusammenkunft — Herrn Prof. Dr. Görtler — für die mühevolle, sorgfältige Vorbereitung dieser Tagung der herzliche Dank aller Teilnehmer ausgesprochen. Der bei dem letzten Abendessen insbesondere auch von den ausländischen Teilnehmern ausgesprochene Dank wird ihm gezeigt haben, wie sehr man die große für die Vorbereitung der Tagung aufgewendete Mühe anerkannte.

Willers.

München: Am 26. April 1951 verstarb an den Folgen eines Verkehrsunfalles Geh. Rat Prof. Dr. Arnold Sommerfeld im 82. Lebensjahre.

Die Accademia dei Lincei hat im Dezember vorigen Jahres eine aus den Herren Castelnuovo, Amaldi, Krall, Persico, Signorini und Tonolo bestehende Kommission beauftragt, die gesammelten Werke von Levi, Civita herauszugeben. Die Ausgabe wird etwa fünf bis sechs Bände umfassen. Der erste Band ist druckfertig und wird etwa 3000 Lire kosten. Um eine Entscheidung über die Höhe der Auflage treffen zu können, bittet Herr Prof. A. Signorini - Rom (Universität) Interessenten sich an ihn zu wenden.

## ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

### Druckfehlerberichtigung

**Zu Sauer: Dreidimensionale Probleme der Charakteristikentheorie partieller Differentialgleichungen.** Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 347—356.

Auf S.354 findet sich die Bemerkung, daß die Diff.-Gl. (13) mit dem System der drei Diff.-Gleichungen:

$$(S) \begin{aligned} A_{11}u_1 + \dots + A_{33}w_3 &= G, & u_3 - w_1 &= 0, \\ v_3 - w_2 &= 0 \end{aligned}$$

äquivalent ist. Herr Pfeiffer hat mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß diese Feststellung zu Mißverständnissen Anlaß geben kann. Natürlich sind die Diff.-Gl. (13) und das System (S) nicht in dem Sinne äquivalent, daß jede Lösung  $u, v, w$  von (S) auch der Gleichung  $u_3 - w_1 = 0$  genügen und daher auf Lösungen der Diff.-Gl. (13) führen würde. Äquivalent sind jedoch die Lösungen von (S) und die Lösungen von (13) mit übereinstimmenden Anfangsbedingungen, nämlich: Jede Lösung  $u, v, w$  von (S), deren Anfangswerte  $u_0, v_0, w_0$  auf einer raumartigen Ausgangsfläche  $(F)$  mit den Ableitungen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  einer Lösung  $\varphi(x, y, z)$  von (13) übereinstimmen, ist

in einer gewissen Umgebung von  $(F)$  identisch mit den Ableitungen dieser Lösung  $\varphi$  und bestimmt daher diese bis auf eine additive Konstante.

München.

R. Sauer.

**Zu Buchholz: Besondere Reihenentwicklungen für eine häufig vorkommende zweireihige Determinante mit Zylinderfunktionen und ihre Nullstellen.** Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 356—367.

S. 360: In Gl. (6a) ist im zweiten Faktor hinter dem Summenzeichen im Nenner  $z$  zu streichen.

**Zu Buchholz: Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen des Drehparabols.** Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 287—288.

S. 288: In den Gln. (4) und (4a) muß als Summationsvariable  $n$  statt  $\eta$  gesetzt werden.

In Gl. (5) lautet das Argument der  $M$ -Funktion unter dem Integral  $i\eta$  statt  $i\eta$ .

In den Gln. (5) und (6) ist das Differential der äußeren Integration  $d\eta$  durch  $d\lambda$  zu ersetzen.

Darmstadt.

H. Buchholz.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin, Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher: Sammelnummer 42 55 71, Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Versagnummern dieses Heftes: 1009/31/7. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis vierteljährlich DM 15.— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft DM 6.—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, anderenfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. L/V/12/7 — 0,95 — (245).